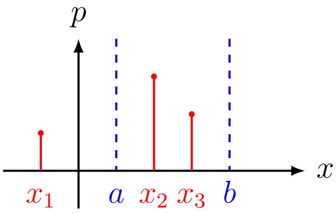
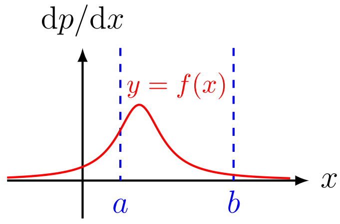
Die Idee

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega) = x$ zuordnet.



X hat *diskrete* Werte (Würfelaugen)

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} P(X = x_i)$$



X hat *stetige* Werte (Temperatur)

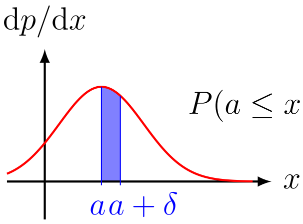
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition einer stetigen Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X ist *stetig*, wenn es eine nichtnegative Funktion $f(x)$ gibt, die *Wahrscheinlichkeitsdichte* (*probability density function*) oder kurz *PDF* genannt wird und folgende Eigenschaften hat:

- $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Wegen $P(X = a) = P(a \leq x \leq a) = \displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ sind die Werte $f(a)$ keine Wahrscheinlichkeiten sondern *Wahrscheinlichkeitsdichten*. Näherungsweise gilt:



$$P(a \leq x \leq a + \delta) \approx f(a) \cdot \delta$$

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Die Regel Summe → Integral, $x_i \to x$ und $p_i \to f(x)$ gilt auch hier. [x_i sind die Werte der diskreten ZV]

	diskret	**stetig**
$\mathrm{E}(X) = \mu$	$\sum_{x_i} x_i p_i$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$	$\sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 p_i$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

Die in vielen Fällen hilfreiche Forme $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ gilt auch für stetige Zufallsvariablen.

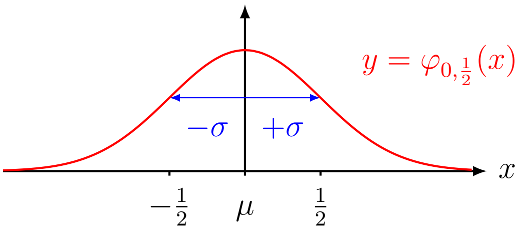
Die Königin unter den stetigen Zufallsvariablen

Die Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2. Sie wird *normalverteilte* Zufallsvariable genannt und entsteht beispielsweise dann, wenn Summen vieler identisch verteilter Zufallsvariablen addiert werden.

Ist X_i die Augenzahl beim i-ten Wurf mit einem Spielwürfel und n gross, so ist $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ annähernd normalverteilt

Für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heisst $\varphi_{0,1} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ *Standardnormalverteilung.*



$P(a \le x \le b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x$ kann nicht mit einer Stammfunktion bestimmt werden. Stattdessen müssen wir einen geeigneten Taschenrechner oder eine Tabelle verwenden. NormalPDF berechnet die Funktionswerte; NormalCDF die Integrale (Wahrscheinlichkeiten).

Beispiel im Stil einer mündlichen Maturaaufgabe

Gegeben: $f(x) = \begin{cases} ax & \text{wenn } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(a) Bestimme a, so dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 ax\,\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^2 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

(b) Berechne $P(X \le 1)$.

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

(c) Berechne den Erwartungswert der zu f gehörenden Zufallsvariable X.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$