Integralrechnung

Übungen

Aufgabe 1.1

Berechne die bestimmten Integrale *ohne* den Taschenrechner.

(a) $\int_2^7 3 \, \mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^5 \frac{2}{3} \, \mathrm{d}x$

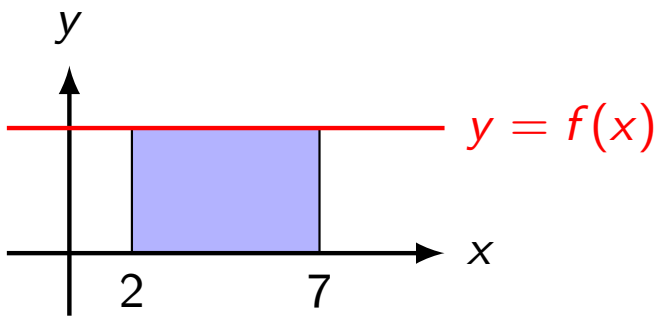
(c) $\int_0^4 (x+1) \, \mathrm{d}x$

(d) $\int_3^5 (2x-1) \, \mathrm{d}x$

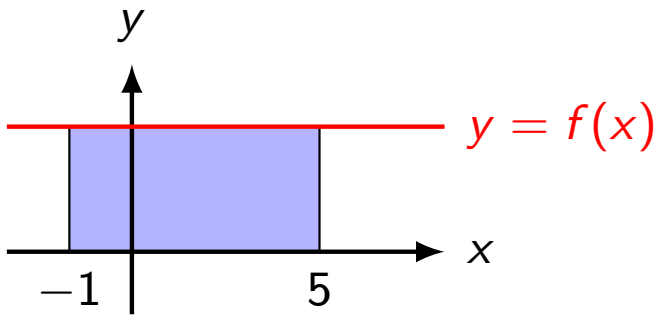
(e) $\int_0^2 \left(10 - \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x$

Aufgabe 1.1

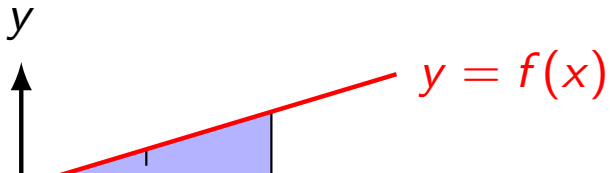
(a) $\int_2^7 3\,\mathrm{d}x = (7-2)\cdot 3 = 5\cdot 3 = 15$



(b) $\int_{-1}^5 \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x = (5-(-1))\cdot\frac{2}{3} = 4$



(c) $\int_0^4 (x+1)\,\mathrm{d}x = f(2)\cdot(4-0) = 3\cdot 4 = 12$



Aufgabe 1.2

Berechne die bestimmten Integrale mit der Integegralfunktion des Taschenrechners. Achte darauf, dass bei trigonometrischen Funktionen das Bogenmass (rad) eingestellt ist.

(a) $\int_0^2 \left(10 - \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^9 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x + 1\right) \mathrm{d}x$

(d) $\int_1^2 (x+1)^2 \, \mathrm{d}x$

(e) $\int_0^1 \sin(x) \, \mathrm{d}x$

(f) $\int_0^{2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 1.2

(a) $\int_0^2 \left(10 - \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x = 19$

(b) $\int_0^9 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = 18$

(c) $\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x + 1\right) \mathrm{d}x = 2.71828\ldots \stackrel{?}{=} \mathrm{e}$

(d) $\int_1^2 (x+1)^2\, \mathrm{d}x = 39$

(e) $\int_0^1 \sin(x)\, \mathrm{d}x = 2$

(f) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\, \mathrm{d}x = 0$

Aufgabe 1.3

Berechne das bestimmte Integral näherungsweise mit einer Approximation durch n Rechtecke gleicher Breite.

(a) $n = 1$:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

(b) $n = 2$:

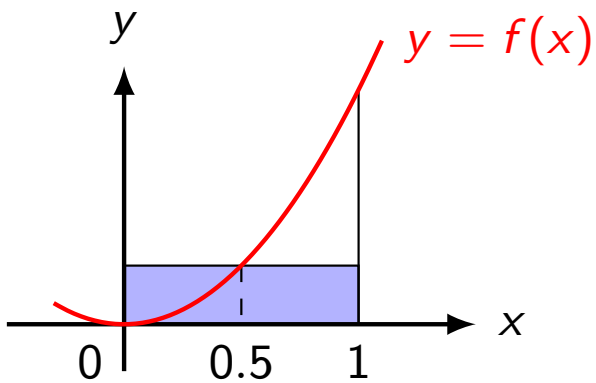
$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

(b) $n = 5$:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

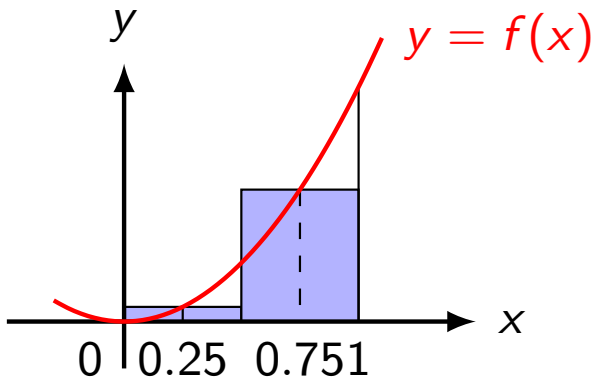
Aufgabe 1.3

(a) $n = 1$: $\int_0^1 x^2 \, dx$



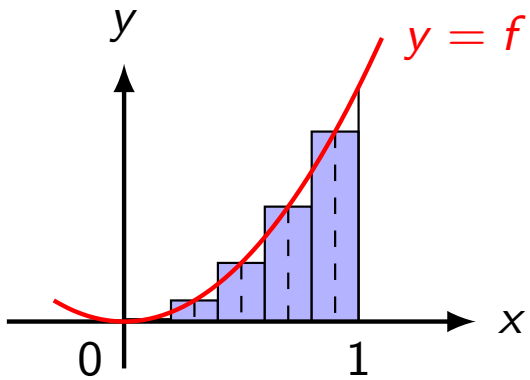
x_i	$f(x_i)$	Δx	A_i
0.5	0.25	1	0.25

(b) $n = 2$: $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx \approx 0.3125$



x_i	$f(x_i)$	Δx	A_i
0.25	0.0625	0.5	0.03125
0.75	0.5625	0.5	0.28125
			0.31250

(c) $n = 5$: $\int_0^1 x^2\,dx \approx 0.33$



x_i	$f(x_i)$	Δx	A_i
0.1	0.01	0.2	0.002
0.3	0.09	0.2	0.018
0.5	0.25	0.2	0.050
0.7	0.49	0.2	0.098
0.9	0.81	0.2	0.162
			0.330

Aufgabe 1.4

Vereinfache die Integralterme so weit wie möglich. Der Wert des Integrals muss nicht berechnet werden.

(a) $\int_1^5 \cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^2 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-4}^{-1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_3^5 x^2\,\mathrm{d}x - \int_3^{-1} x^2\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 1.4

(a) $\int_1^5 \cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 1.4

(a) $$\int_1^5 \cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) $$\int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^2 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Aufgabe 1.4

(a) $$\int_1^5 \cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) $$\int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^2 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(c) $$\int_{-4}^{-1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_3^5 x^2\,\mathrm{d}x - \int_3^{-1} x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-4}^{-1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x^2\,\mathrm{d}x + \int_3^5 x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^5 x^2\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.1

Gib das unbestimmte Integral der Funktion f an. Falls nötig, verwende die Formelsammlung. Beachte, dass wie beim Differenzieren das Integral mit Summen und konstanten Faktoren vertauscht werden darf.

(a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$

(b) $f(x) = \cos x$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = x^{-2}$

(f) $f(x) = \sqrt{x}$

(g) $f(x) = x^2 + x + 1$

(h) $f(x) = 3\sin(x)$

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$

(j) $f(x) = \ln|x|$

(k) $f(x) = (2x - 1)^2$

Aufgabe 2.1

(a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(b) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin(x) + C$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \mathrm{e}^x + C$

(d) $f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(x) + C$

(e) $f(x) = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -x^{-1} + C$

(f) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(g) $f(x) = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$

(h) $f(x) = 3\sin(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -3\cos(x) + C$

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{5x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C$

(j) $f(x) = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad F(x) = x(\ln|x| - 1) + C$

(k) $f(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 \quad \Rightarrow$
$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$

Aufgabe 2.2

Berechne die bestimmten Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes.
Hinweis: Die Ergebnisse können mit der Integralfunktion des Taschenrechners kontrolliert werden.

(a) $\int_0^2 4x^3 \, dx = \left[x^4\right]_0^2 = 2^4 - 0^4 = 16 - 0 = 16$

(b) $\int_2^4 (x^2 + 3) \, dx$

(c) $\int_{-1}^0 (6x^2 - 4x + 1) \, dx$

(d) $\int_{-2}^2 (x^3 + x) \, dx$

(e) $\int_0^1 (x^2 + x)^2 \, dx$

Aufgabe 2.2

(a) $\int_0^2 4x^3 \, dx = \left[x^4\right]_0^2 = 2^4 - 0^4 = 16 - 0 = 16$

(b) $\int_2^4 (x^2 + 3) \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_2^4 = \frac{100}{3} - \frac{26}{3} = \frac{74}{3}$

(c) $\int_{-1}^0 (6x^2 - 4x + 1) \, dx = \left[2x^3 - 2x^2 + x\right]_{-1}^0 = 0 - (-5) = 5$

(d) $\int_{-2}^2 (x^3 + x) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^2 = 6 - 6 = 0$

(e) $\int_0^1 (x^2 + x)^2 \, dx = \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2) \, dx$

$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{31}{30} - 0 = \frac{31}{30}$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution:

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{14}{9}$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\, e^{x^2}\, dx$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \ldots$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \ldots$$

Substitution:

Aufgabe 3.2

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \ldots$$

Substitution: $u = x^2$

Aufgabe 3.2

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x$

Aufgabe 3.2

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2x} du$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x\,\mathrm{e}^{u} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x\,\mathrm{e}^{u} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x\,\mathrm{e}^{u} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{u}$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x\,\mathrm{e}^{u} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{u} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(x^2)} + C$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln|x|}{x} \, dx$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution:

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x|$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\ldots = 4 \int \frac{u}{x} \cdot x \, \mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\ldots = 4 \int \frac{u}{x} \cdot x \, \mathrm{d}u = 4 \int u \, \mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\ldots = 4 \int \frac{u}{x} \cdot x \, \mathrm{d}u = 4 \int u \, \mathrm{d}u = 4 \cdot \frac{1}{2} u^2$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4 \cdot \ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \ln |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\ldots = 4 \int \frac{u}{x} \cdot x \, \mathrm{d}u = 4 \int u \, \mathrm{d}u = 4 \cdot \frac{1}{2} u^2 = 2(\ln |x|)^2 + C$$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \,\mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution:

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \dfrac{1}{2}x - 1$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \dfrac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \dfrac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \dfrac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{-1}^0 u^5 \cdot 2\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \dfrac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{-1}^{0} u^5 \cdot 2\,\mathrm{d}u = 2\left[\frac{1}{6}u^6\right]_{-1}^{0}$$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^5 \mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \dfrac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{-1}^{0} u^5 \cdot 2\,\mathrm{d}u = 2\left[\frac{1}{6}u^6\right]_{-1}^{0} = 2\left(0 - \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution:

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x^2 \sin(u) \cdot \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x^2 \sin(u) \cdot \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x^2 \sin(u) \cdot \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos u$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x^2 \sin(u) \cdot \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos u$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution:

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^2 \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^2 \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^2 \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[\ln|u|\right]_1^2$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^2 \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[\ln|u|\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Aufgabe 3.7

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3.7

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Aufgabe 3.7

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $u(t) = t + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$

Aufgabe 3.7

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $u(t) = t + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\left[\sqrt{u}\right]_1^4 = 2(2-1) = 2$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 x \ln(x^2 + 1)\, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 x \ln(x^2 + 1)\, \mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 x \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 x \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$
$\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_1^2 x \ln|u| \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln|u|\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\big[u(\ln|u| - 1)\big]_1^2 = \frac{1}{2}\big[2(\ln(2) - 1) - (\ln(1) - 1)\big]$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln(2) - 1) = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) =$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$

$$g(x) =$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$

$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) =$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x \quad &\Rightarrow \quad f(x) &= -\cos x \\ g(x) &= x \quad &\Rightarrow \quad g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$$

$$\ldots = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos x \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$$

$$\ldots = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos x \mathrm{d}x$$

$$= \left(-\pi \cos \pi - 0\right) + \left[\sin x \right]_0^{\pi} = -\pi \cdot (-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) =$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x$

$g(x) =$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$
$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) =$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \mathrm{e}^x \quad &\Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x \\ g(x) = x \quad &\Rightarrow \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x \\ g(x) &= x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\ldots = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x \\ g(x) &= x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\ldots = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$$

Aufgabe 3.11

$$\int_1^e x \ln|x| \, dx$$

Aufgabe 3.11

$$\int_1^e x \ln|x| \mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.11

$$\int_1^e x \ln|x| \mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) = x \quad &\Rightarrow \quad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 \\ g(x) = \ln|x| \quad &\Rightarrow \quad g'(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.11

$$\int_1^e x \ln|x| \mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) = x \quad &\Rightarrow \quad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 \\ g(x) = \ln|x| \quad &\Rightarrow \quad g'(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

$$\ldots = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln|x|\right]_1^e - \int_0^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

Substitution: $u = 1 + e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{e^x}\,du$

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

Substitution: $u = 1 + e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{e^x}\,du$

$$\ldots = \int_1^{1+e} \frac{e^x}{u} \cdot \frac{1}{e^x}\,du = \int_1^{1+e} \frac{1}{u}\,du = \Big[\ln|u|\Big]_1^{1+e}$$

$$= \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\frac{1+e}{2}$$

Aufgabe 3.13

$$\int_0^1 x e^{-x} \, dx$$

Aufgabe 3.13

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$$

$$\ldots = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Aufgabe 3.14

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.14

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.14

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

Aufgabe 3.14

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{3x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_9^{10} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{3}{2} \cdot \left[\ln|u|\right]_9^{10}$$

$$= \frac{3}{2}\big(\ln(10) - \ln(9)\big) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{10}{9}\right)$$

Aufgabe 3.15

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.15

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.15

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}u$$

Aufgabe 3.15

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}u$$

$$\ldots = \int_0^1 u^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}u = \int_0^1 u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.16

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.16

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Aufgabe 3.16

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$g(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Aufgabe 3.16

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$g(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\ldots = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

Aufgabe 4.1

Berechne das bestimmte Integral exakt mit Hilfe des Hauptsatzes. Beachte, dass das Integral auch negativ sein kann, wenn die Fläche unterhalb der x-Achse grösser ist als die oberhalb.

(a) $\int_2^5 \left(x^2 + 3\right) \mathrm{d}x$

(b) $\int_1^3 \left(x^2 - 4x\right) \mathrm{d}x$

(c) $\int_{-1}^1 \left(4x^3 + 2x\right) \mathrm{d}x$

Aufgabe 4.1

(a) $\int_2^5 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_2^5 = \frac{170}{3} - \frac{26}{3} = 48$

Aufgabe 4.1

(a) $\int_2^5 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_2^5 = \frac{170}{3} - \frac{26}{3} = 48$

(b) $\int_1^3 \left(x^2-4x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_1^3 = -9-\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{22}{3}$

Aufgabe 4.1

(a) $\int_2^5 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_2^5 = \frac{170}{3} - \frac{26}{3} = 48$

(b) $\int_1^3 \left(x^2-4x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_1^3 = -9-\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{22}{3}$

(c) $\int_{-1}^1 \left(4x^3+2x\right) \mathrm{d}x = \left[x^4-x^2\right]_{-1}^1 = 2-2 = 0$

Aufgabe 4.2

Welche Werte für k erfüllen die Gleichung?

(a) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2kx + k\right) \mathrm{d}x = 23$

(b) $\int_2^k \left(4x - 1\right) \mathrm{d}x = 39$

Aufgabe 4.2

(a)
$$\int_1^2 \left(3x^2 + 2kx + k\right) \mathrm{d}x = 23$$
$$\left[x^3 + kx^2 + kx\right]_1^2 = 23$$
$$\left(8 + 4k + 2k\right) - \left(1 + k + k\right) = 23$$
$$7 + 4k = 23$$
$$k = 4$$

Aufgabe 4.2

(a)
$$\int_1^2 \left(3x^2 + 2kx + k\right) \mathrm{d}x = 23$$
$$\left[x^3 + kx^2 + kx\right]_1^2 = 23$$
$$\left(8 + 4k + 2k\right) - \left(1 + k + k\right) = 23$$
$$7 + 4k = 23$$
$$k = 4$$

(b)
$$\int_2^k \left(4x - 1\right) \mathrm{d}x = 39$$
$$\left[2x^2 - x\right]_2^k = 39$$
$$\left(2k^2 - k\right) - \left(8 - 2\right) = 39$$
$$2k^2 - k - 45 = 39$$
$$k_1 = -4.5$$
$$k_2 = 5$$

Aufgabe 4.3

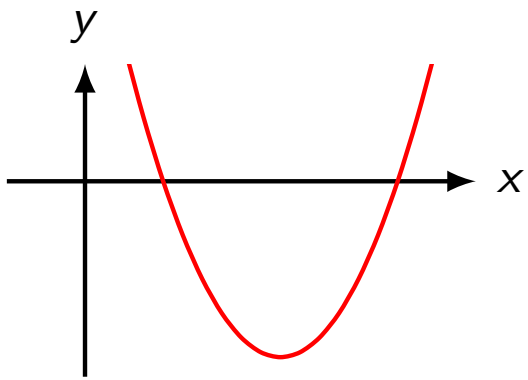
Berechne den Inhalt der vom Graphen der Funktion f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Aufgabe 4.3

(a) $f: y = x^2 - 5x + 4$

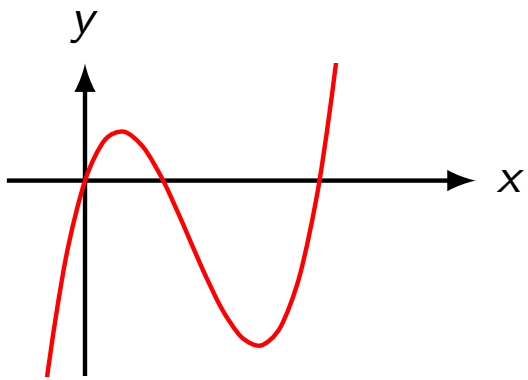


NSt: $0 = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 4$

$$I = \int_1^4 \left(x^2 - 5x + 4\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^4 = -\tfrac{8}{3} - \tfrac{11}{6} = -\tfrac{9}{2}$$

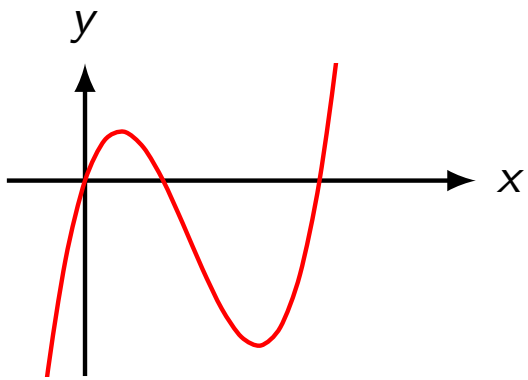
$$A = |I| = \tfrac{9}{2} = 4.5$$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$



NSt: $0 = x(x+1)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

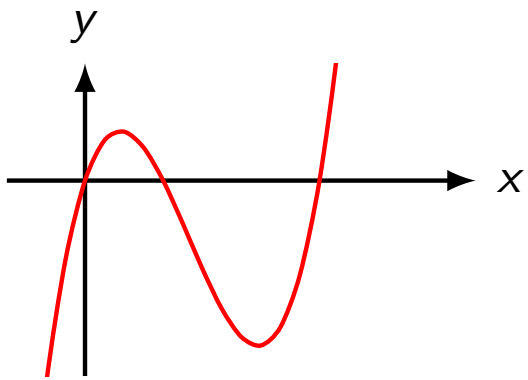


NSt: $0 = x(x+1)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left(-\tfrac{7}{12}\right) = \tfrac{7}{12}$$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$



NSt: $0 = x(x+1)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$

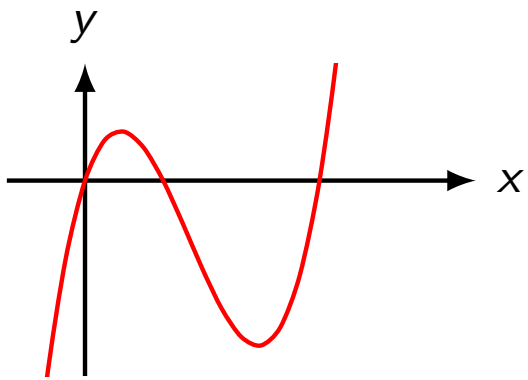
$$I_1 = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left(-\tfrac{7}{12}\right) = \tfrac{7}{12}$$

$$I_2 = \int_{0}^{3} \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$

$$= \left(-\tfrac{45}{4}\right) - 0 = -\tfrac{45}{4}$$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$



NSt: $0 = x(x+1)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left(-\tfrac{7}{12}\right) = \tfrac{7}{12}$$

$$I_2 = \int_{0}^{3} \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$

$$= \left(-\tfrac{45}{4}\right) - 0 = -\tfrac{45}{4}$$

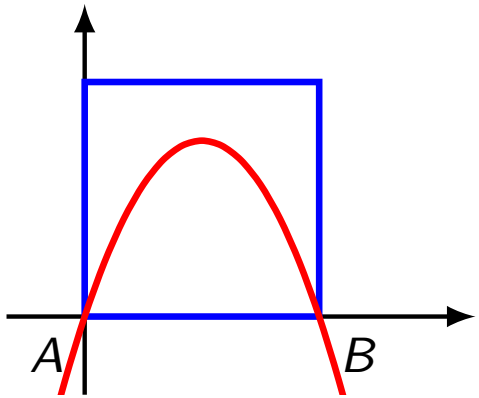
$$A = |I_1| + |I_2| = \tfrac{7}{12} + \tfrac{45}{4} = \tfrac{71}{6}$$

Aufgabe 4.4

Die Parabel $f: y = 3x - x^2$ schneidet die x-Achse in den Punkten A und B. Zeige, dass die Parabel das im 1. Quadranten liegende Quadrat mit der Seite AB halbiert.

Aufgabe 4.4

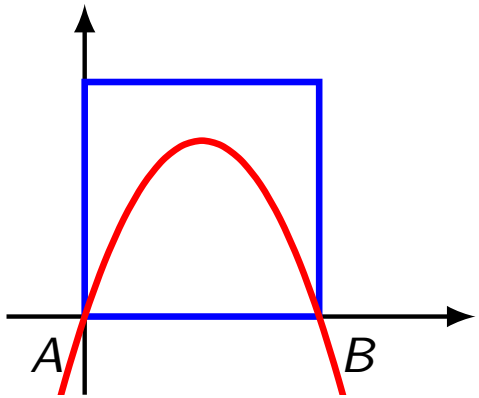
$f: y = 3x - x^2$



Nullstellen: $0 = x(3 - x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$

Aufgabe 4.4

$f: y = 3x - x^2$

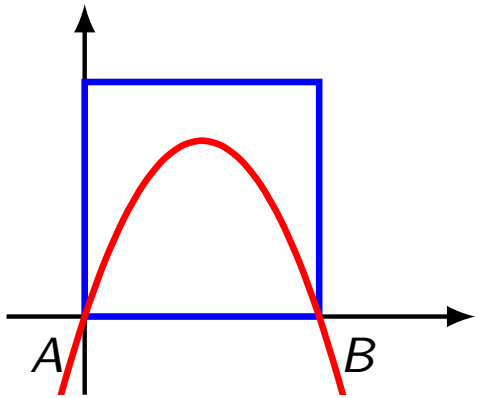


Nullstellen: $0 = x(3 - x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$A_{\text{Parabel}} = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \tfrac{9}{2} - 0 = \tfrac{9}{2}$$

Aufgabe 4.4

$f: y = 3x - x^2$



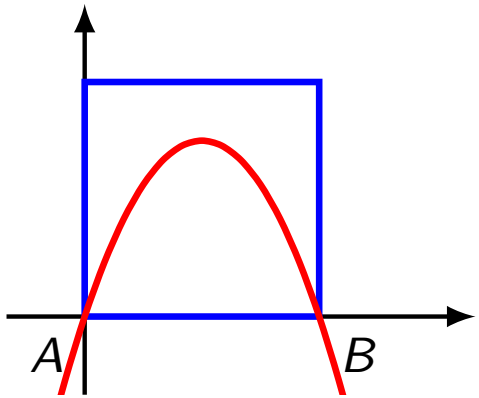
Nullstellen: $0 = x(3 - x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$A_{\text{Parabel}} = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \tfrac{9}{2} - 0 = \tfrac{9}{2}$$

$$A_{\text{Quadrat}} = AB^2 = 3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{Quadrat}} = 2 \cdot A_{\text{Parabel}}$$

Aufgabe 4.4

$f: y = 3x - x^2$



Nullstellen: $0 = x(3 - x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$A_{\text{Parabel}} = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \tfrac{9}{2} - 0 = \tfrac{9}{2}$$

$$A_{\text{Quadrat}} = AB^2 = 3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{Quadrat}} = 2 \cdot A_{\text{Parabel}}$$

Aufgabe 4.5

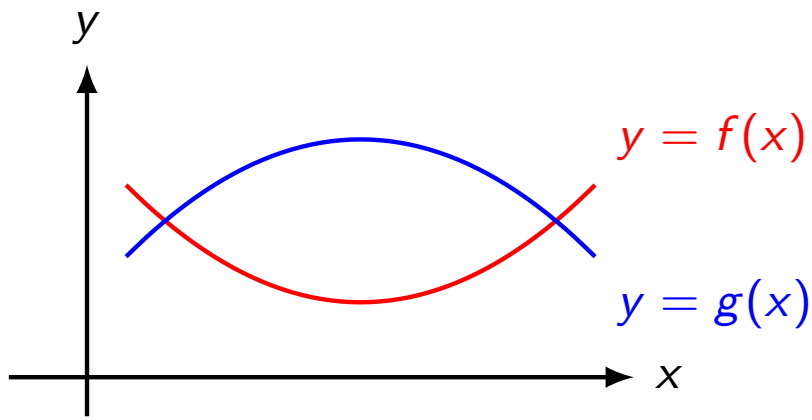
Berechne den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g einschliessen.

(a) $f: y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 4$, $g: y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 2$,

(b) $f: y = x^2 - 3x$, $g: y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Aufgabe 4.5

(a) $f: y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 4$, $g: y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 2$,



Schnittstellen: $\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 4 = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 2 \quad || \cdot 6$

$$x^2 - 7x + 24 = -x^2 + 7x + 12$$

$$2x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$x_1 = 1$$

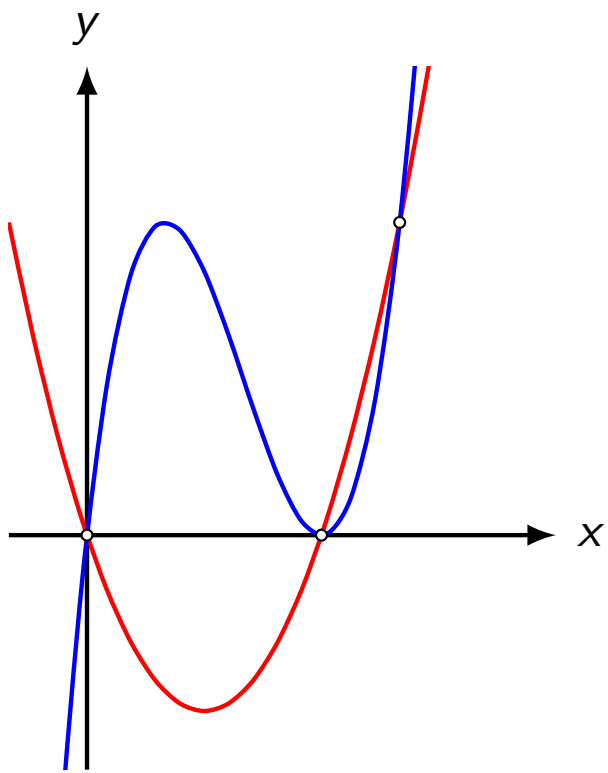
$$x_2 = 6$$

$$g(x) - f(x) = \left(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{6}x + 2\right) - \left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{7}{6}x + 4\right) = -\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{7}{3}x - 2$$

$$A = \int_1^6 \left(-\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{7}{3}x - 2\right) \mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{7}{6}x^2 - 2x\right]_1^6 =$$

$$6 + \frac{17}{} - \frac{125}{}$$

(b) $f: y = x^2 - 3x$, $g: y = x^3 - 6x^2 + 9x$



Schnittstellen: $x^2 - 3x = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$0 = x^3 - 7x^2 + 12x$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

$f(x) - g(x) = \left(x^2 - 3x\right) - \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) = -x^3 + 7x^2 - 12x$

Aufgabe 4.6

(a) Bestimme die Extrempunkte der Funktion $f : x^3 - 3x + 6$ und skizziere den Graphen G_f von f.

(b) Welchen Inhalt hat die Fläche zwischen dem Graphen G_f und der Tangente im Tiefpunkt?

Aufgabe 4.6

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

Extrempunkte:

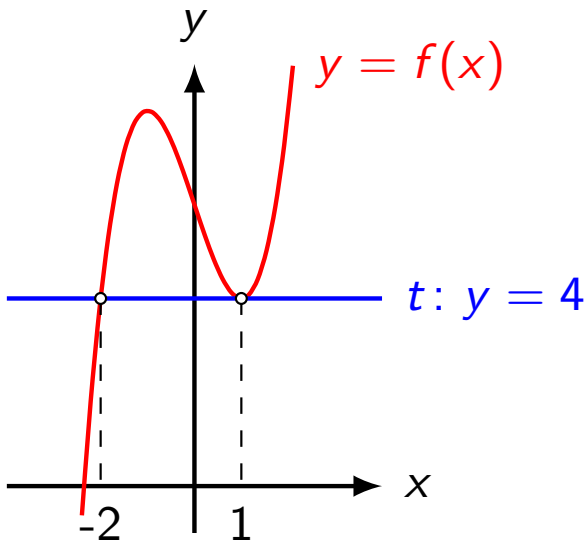
$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad f''(-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-1, 8)$

$x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, 4)$

(b) Skizze:



Schnittstelle: $x^3 - 3x + 6 = 4$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

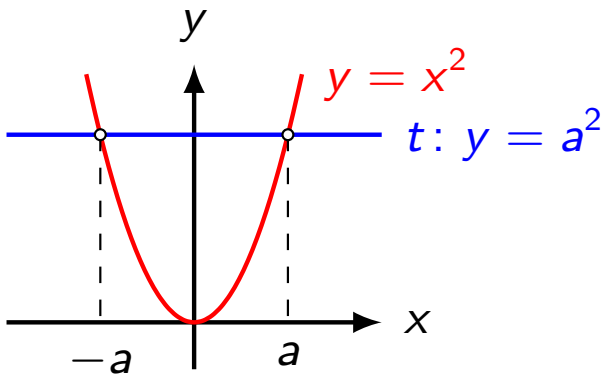
$$d(x) = f(x) - t(x) = x^3 - 3x + 6 - 4 = x^3 - 3x + 2$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{3}{2}^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \tfrac{3}{4} - (-6) = \tfrac{27}{4}$$

Aufgabe 4.7

Eine Parallele zur x-Achse schliesst mit dem Graphen der Funktion $f: y = x^2$ eine Fläche vom Inhalt 36 ein. Bestimme die Gleichung der Parallelen.

Aufgabe 4.7



Wegen der Symmetrie, genügt es, nur über eine Hälft zu integrieren:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 18$$

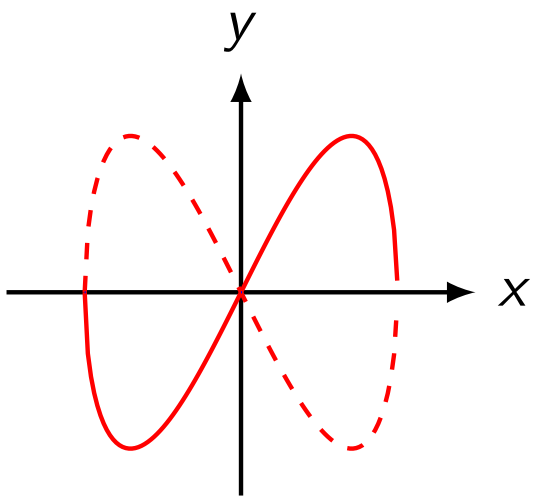
$$\begin{aligned}
\left[a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a &= 18 \\
a^3 - \tfrac{1}{3}a^3 &= 18 \\
\tfrac{2}{3}a^3 &= 18 \\
a^3 &= 27 \\
a = 3 \quad &\Rightarrow \quad y = 3^2 = 9
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.1

Das zwischen den beiden Nullstellen der Funktion $f : y = x\sqrt{4 - x^2}$ liegende Kurvenstück rotiert um die x-Achse und beschreibt einen Körper, der eine ähnliche Form wie das Glas einer Sanduhr hat. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 5.1

$f: y = x\sqrt{4 - x^2}$



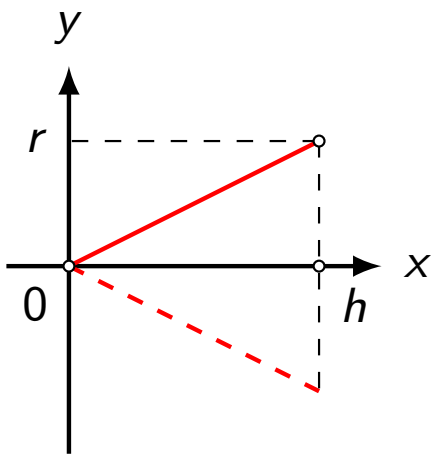
Nullstellen: $0 = x\sqrt{4 - x^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(x\sqrt{4 - x^2}\right) \mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{2} x^2(4 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

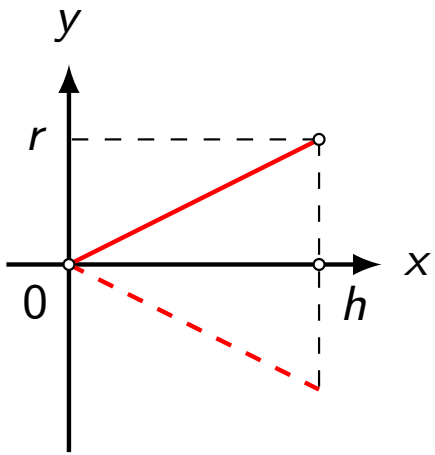
$$= 2\pi \int_{0}^{2} (4x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi \left(\tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{128\pi}{15}$$

Aufgabe 5.2

Leite die Volumenformel für einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h durch ein geeignetes Volumenintegral her. Verwende dazu die folgende Skizze:



Aufgabe 5.2



Randfunktion: $f: y = \frac{r}{h}x$

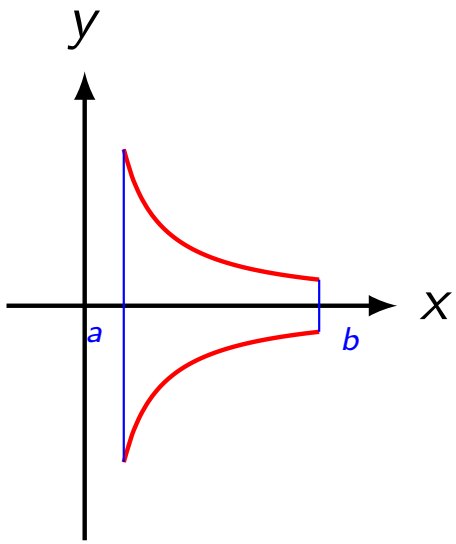
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{r^2}{3h^2} \cdot x^3\right]_0^h$$

$$= \pi \left(\frac{r^2}{3h^2} \cdot h^3 - 0\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Aufgabe 5.3

Der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ über dem Intervall $I = [a, b]$ (mit $0 < a$) rotiert um die x-Achse. Berechne formal das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 5.3



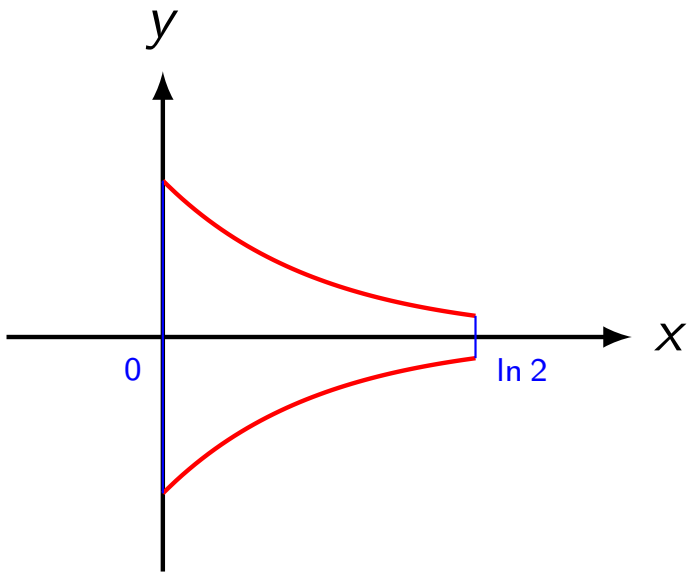
$$V = \pi \int_a^b \left(x^{-1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_a^b \left(x^{-2}\right) \mathrm{d}x = \pi \left[-x^{-1}\right]_a^b$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

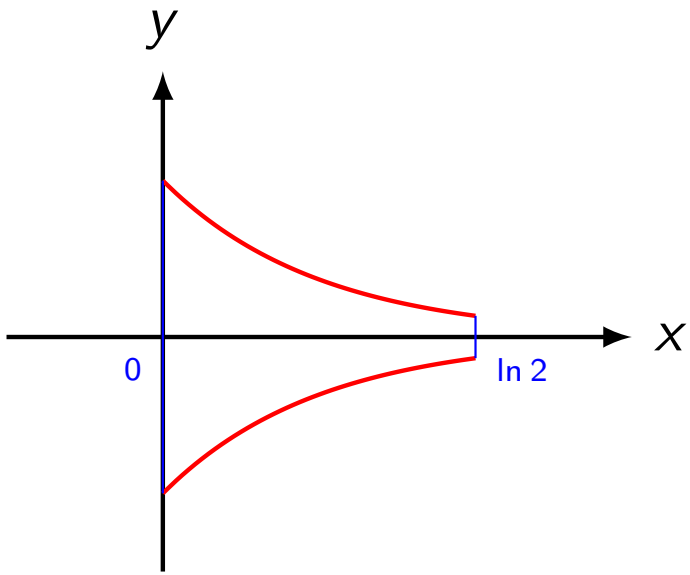
Aufgabe 5.4

Berechne das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn das Kurvenstück mit der Gleichung $y = \mathrm{e}^{-x}$ für $0 \leq x \leq \ln 2$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5.4

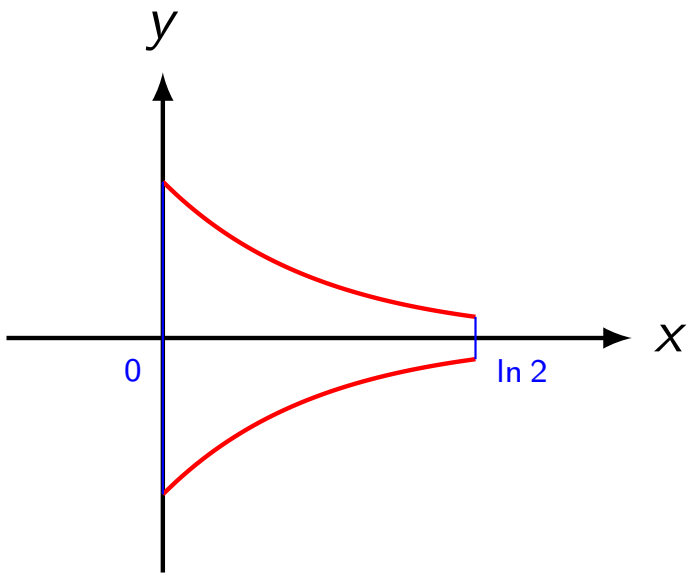


Aufgabe 5.4



$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 5.4



$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x}\, dx = \pi \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$

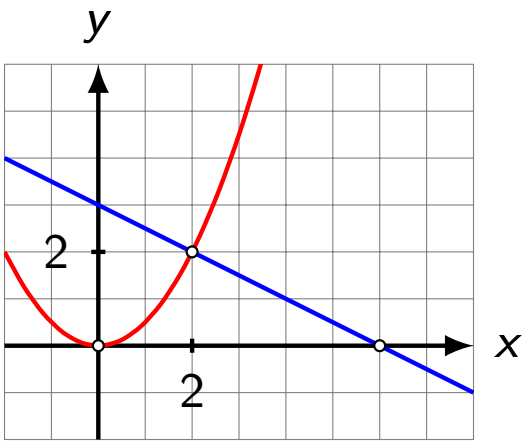
$$= \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2\ln 2} +\right) - \pi \left(-\frac{1}{2} e^{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \left(e^{\ln 2}\right)^{-2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot 2^{-2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

Aufgabe 5.5

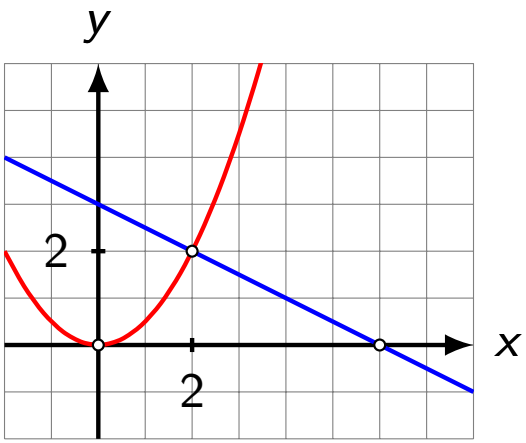
Die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ begrenzen mit der x-Achse eine Fläche. Bestimme das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5.5



Schnittstellen: $f(x) = g(x)$

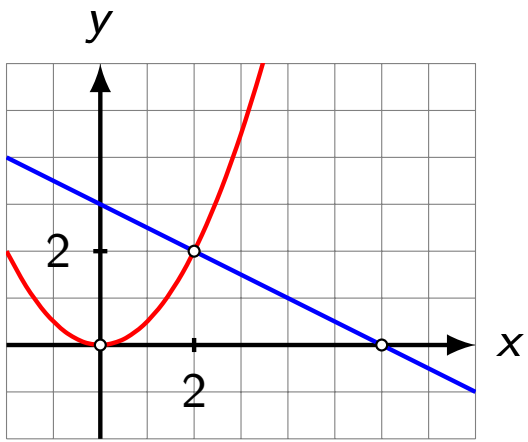
$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + 3$$
$$x^2 = -x + 6$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x-2)(x+3) = 0$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -3$$



Nullstellen:

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$g(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6$



$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^2 \frac{1}{4}x^4 \,\mathrm{d}x + \pi \int_2^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9\right) \,\mathrm{d}x$$

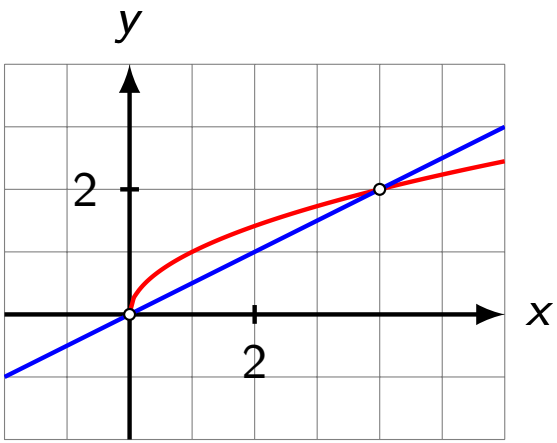
$$= \pi \left[\frac{1}{20}x^5\right]_0^2 + \pi \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x\right]_2^6$$

$$= \frac{32\pi}{20} + \frac{16\pi}{3} = \frac{104}{15}\pi \approx 21.78$$

Aufgabe 5.6

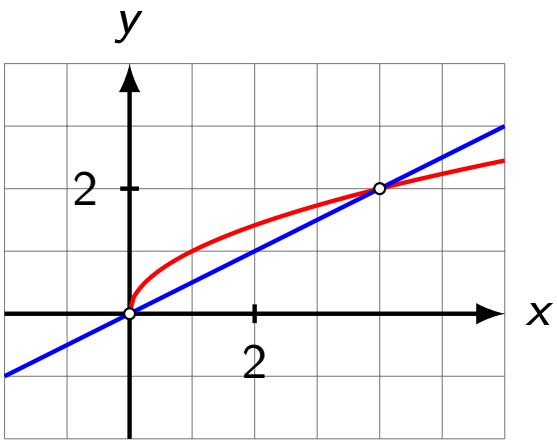
Welches Volumen hat der Drehkörper, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse rotiert?

Aufgabe 5.6



Schnittstellen: $f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x}$$
$$\frac{1}{4}x^2 = x$$
$$x^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 4$$



$$V = \pi \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 x\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 - \pi \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \approx 8.38$$