Aufgabe 1.1

Berechne die bestimmten Integrale *ohne* den Taschenrechner.

(a) $\int_2^7 3\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^5 \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^4 (x+1)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_3^5 (2x-1)\,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^2 \left(10-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$

Aufgabe 1.2

Berechne die bestimmten Integrale mit der Integegralfunktion des Taschenrechners. Achte darauf, dass bei trigonometrischen Funktionen das Bogenmass (rad) eingestellt ist.

(a) $\int_0^2 \left(10 - \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^9 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x + 1\right) \mathrm{d}x$

(d) $\int_1^2 (x+1)^2 \, \mathrm{d}x$

(e) $\int_0^1 \sin(x) \, \mathrm{d}x$

(f) $\int_0^{2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 1.3

Berechne das bestimmte Integral näherungsweise mit einer Approximation durch n Rechtecke gleicher Breite.

(a) $n = 1$:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

(b) $n = 2$:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

(b) $n = 5$:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 1.4

Vereinfache die Integralterme so weit wie möglich. Der Wert des Integrals muss nicht berechnet werden.

(a) $\int_1^5 \cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_2^3 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^2 \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-4}^{-1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_3^5 x^2\,\mathrm{d}x - \int_3^{-1} x^2\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2.1

Gib das unbestimmte Integral der Funktion f an. Falls nötig, verwende die Formelsammlung. Beachte, dass wie beim Differenzieren das Integral mit Summen und konstanten Faktoren vertauscht werden darf.

(a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$

(b) $f(x) = \cos x$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = x^{-2}$

(f) $f(x) = \sqrt{x}$

(g) $f(x) = x^2 + x + 1$

(h) $f(x) = 3\sin(x)$

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$

(j) $f(x) = \ln|x|$

(k) $f(x) = (2x - 1)^2$

Aufgabe 2.2

Berechne die bestimmten Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes. *Hinweis:* Die Ergebnisse können mit der Integralfunktion des Taschenrechners kontrolliert werden.

(a) $\int_0^2 4x^3 \,\mathrm{d}x = \left[x^4\right]_0^2 = 2^4 - 0^4 = 16 - 0 = 16$

(b) $\int_2^4 (x^2 + 3) \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-1}^0 (6x^2 - 4x + 1) \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{-2}^2 (x^3 + x) \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^1 \left(x^2 + x\right)^2 \,\mathrm{d}x$

Löse mit der Substitutionsregel.

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4\cdot\ln|x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.4

$$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x-1\right)^5\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.5

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.6

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.7

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 x \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$$

Löse mit partieller Integration.

Aufgabe 3.9

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^{1} x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.11

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \ln |x| \, \mathrm{d}x$$

Vermischte Aufgaben

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.13

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.14

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.15

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.16

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 4.1

Berechne das bestimmte Integral exakt mit Hilfe des Hauptsatzes. Beachte, dass das Integral auch negativ sein kann, wenn die Fläche unterhalb der x-Achse grösser ist als die oberhalb.

(a) $\int_2^5 \left(x^2 + 3\right) \mathrm{d}x$

(b) $\int_1^3 \left(x^2 - 4x\right) \mathrm{d}x$

(c) $\int_{-1}^1 \left(4x^3 + 2x\right) \mathrm{d}x$

Aufgabe 4.2

Welche Werte für k erfüllen die Gleichung?

(a) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2kx + k\right) \mathrm{d}x = 23$

(b) $\int_2^k \left(4x - 1\right) \mathrm{d}x = 39$

Aufgabe 4.3

Berechne den Inhalt der vom Graphen der Funktion f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Aufgabe 4.4

Die Parabel $f\colon y = 3x - x^2$ schneidet die x-Achse in den Punkten A und B. Zeige, dass die Parabel das im 1. Quadranten liegende Quadrat mit der Seite AB halbiert.

Aufgabe 4.5

Berechne den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g einschliessen.

(a) $f\colon y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 4$, $g\colon y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 2$,

(b) $f\colon y = x^2 - 3x$, $g\colon y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Aufgabe 4.6

(a) Bestimme die Extrempunkte der Funktion $f\colon x^3 - 3x + 6$ und skizziere den Graphen G_f von f.

(b) Welchen Inhalt hat die Fläche zwischen dem Graphen G_f und der Tangente im Tiefpunkt?

Aufgabe 4.7

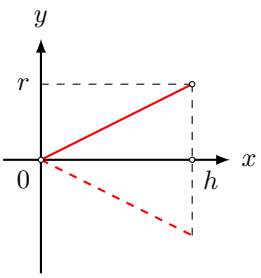
Eine Parallele zur x-Achse schliesst mit dem Graphen der Funktion $f: y = x^2$ eine Fläche vom Inhalt 36 ein. Bestimme die Gleichung der Parallelen.

Aufgabe 5.1

Das zwischen den beiden Nullstellen der Funktion $f\colon y = x\sqrt{4 - x^2}$ liegende Kurvenstück rotiert um die x-Achse und beschreibt einen Körper, der eine ähnliche Form wie das Glas einer Sanduhr hat. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 5.2

Leite die Volumenformel für einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h durch ein geeignetes Volumenintegral her. Verwende dazu die folgende Skizze:



Aufgabe 5.3

Der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ über dem Intervall $I = [a, b]$ (mit $0 < a$) rotiert um die x-Achse. Berechne formal das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 5.4

Berechne das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn das Kurvenstück mit der Gleichung $y = \mathrm{e}^{-x}$ für $0 \leq x \leq \ln 2$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5.5

Die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ begrenzen mit der x-Achse eine Fläche. Bestimme das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5.6

Welches Volumen hat der Drehkörper, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse rotiert?