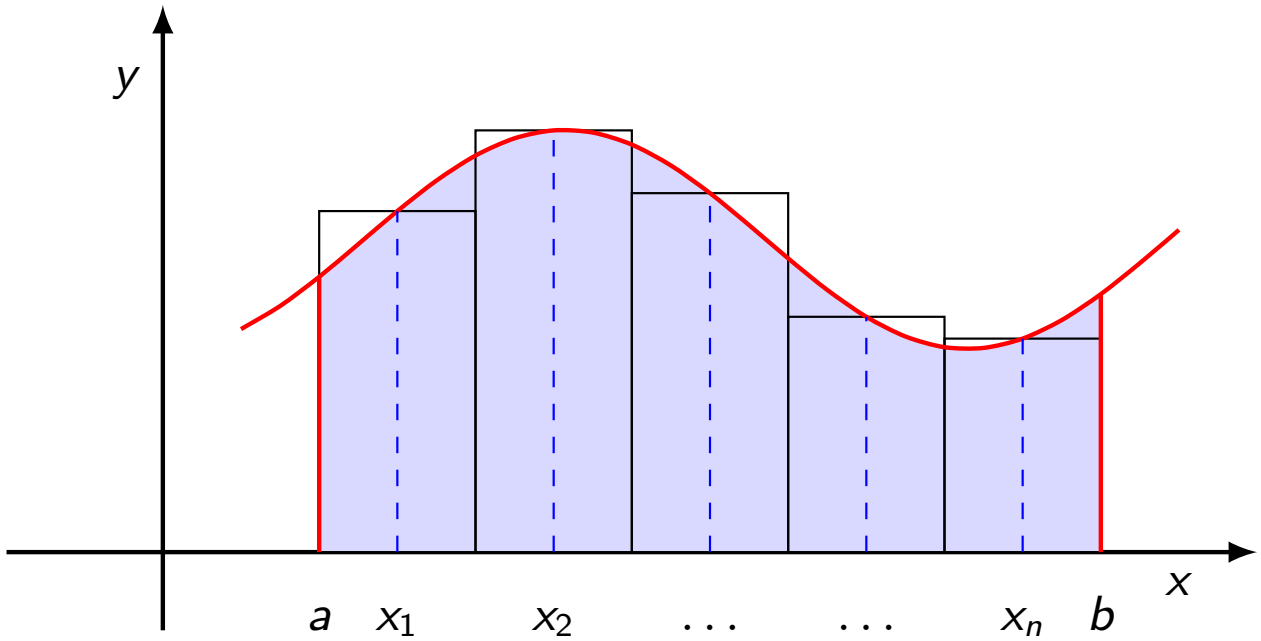
Integralrechnung

Kurzfassung

Das Flächenproblem

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.



$$M = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Gesucht: der Flächeninhalt A der Menge M.

Lösungsidee

1. Zerlege das Intervall $I = [a, b]$ in n gleich breite Teilintervalle mit $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
2. Bestimme die Mittelpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Teilintervalle.
3. Berechne die Funktionswerte: $y_i = f(x_i)$.
4. Nähere den Flächeninhalt A durch die Summe der Rechteckflächen an:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \cdots + A_n \\ &\approx f(x_1) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Näherung wird im Allgemeinen umso besser, je schmaler die Teilintervalle sind.

Wir definieren das *bestimmte Integral* durch:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Für stetige Funktionen auf $[a, b]$ existiert dieser Grenzwert.

Die Integralfunktion

Wir suchen eine Berechnungsvorschrift für bestimmte Integrale, die ohne explizite Grenzwertberechnung auskommt.

Dazu betrachten wir

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

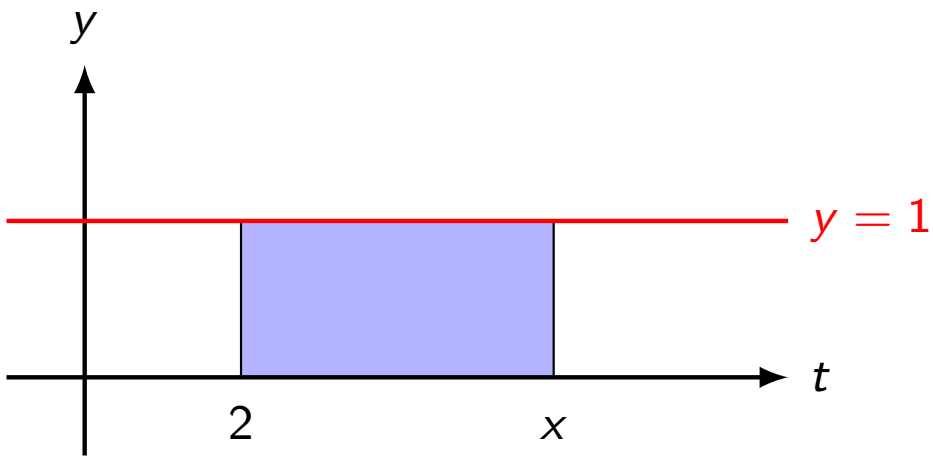
Für festes a heisst F_a die *Integralfunktion* von f mit unterer Integrationsgrenze a.

Die Integrationsvariable t unterscheidet sich von der Variablen x der oberen Integrationsgrenze.

Beispiel 2.1

$$f(x) = 1$$

$$F_2(x) = \int_2^x 1 \, \mathrm{d}t = 1 \cdot (x - 2) = x - 2$$



Für $x \geq 2$ entspricht $F_2(x)$ dem Flächeninhalt des Rechtecks mit der Breite $x - 2$ und der Höhe 1.

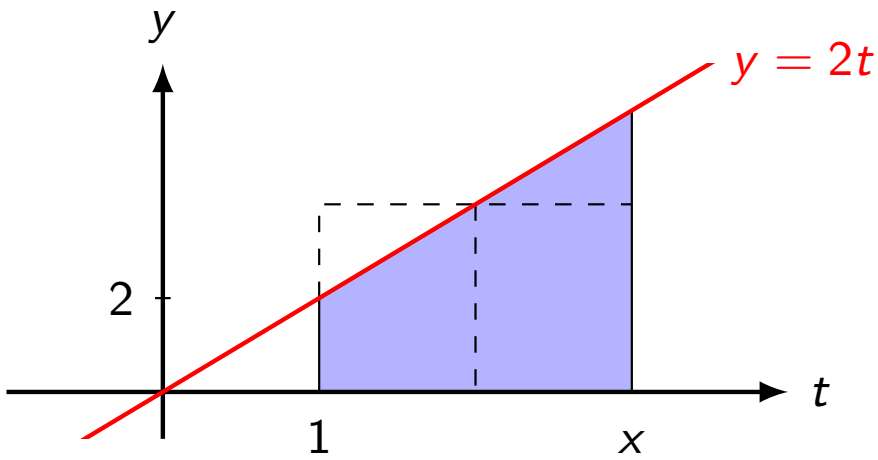
Mit der Integralfunktion lassen sich weitere bestimmte Integrale berechnen.

$$\int_6^9 1 \, \mathrm{d}t = F_2(9) - F_2(6) = (9 - 2) - (6 - 2) = 7 - 4 = 3$$

Beispiel 2.2

$$f(x) = 2x$$

$$F_1(x) = \int_1^x 2t\,\mathrm{d}t = \frac{2+2x}{2} \cdot (x-1) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$



$$\int_0^3 2t\,\mathrm{d}t = F_1(3) - F_1(0) = (9-1) - (0-1) = 8 + 1 = 9$$

Verallgemeinerung?

Vermutung: $F'(x) = f(x)$

Eine Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ heisst *Stammfunktion* von f.
Die Menge aller Stammfunktionen wird als *unbestimmtes Integral* bezeichnet:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Wir überprüfen die Vermutung am Beispiel $f(x) = 3x^2$:

$F(x) = x^3 + C$, denn $F' = f$

Berechne z. B.:

$$\int_1^4 3x^2\,\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = (4^3 + C) - (1^3 + C) = 63$$

Numerische Kontrolle: Berechne das Integral mit dem Taschenrechner und vergleiche das Ergebnis mit dem obigen Wert.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht die Berechnung bestimmter Integrale mithilfe von Stammfunktionen.

Ist f auf $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f, dann gilt:

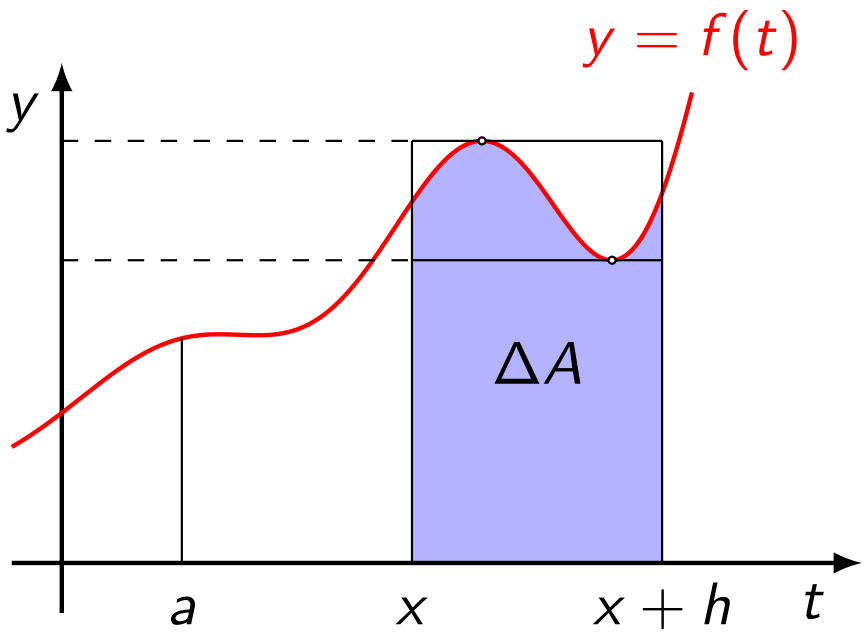
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Beweis des Hauptsatzes (optional)

Es sei f auf $[a, b]$ stetig und $x \in (a, b)$. Wir zeigen, dass für die Integralfunktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

die Beziehung $F_a'(x) = f(x)$ gilt.



Bei einer Änderung der oberen Integrationsgrenze von x auf $x + h$ ändert sich der Integralwert um

$$\Delta A = F_a(x + h) - F_a(x).$$

Für $h > 0$ gilt:

$$\min_{x \le t \le x+h} f(t) \le \frac{\Delta A}{h} \le \max_{x \le t \le x+h} f(t).$$

Für $h < 0$ gilt dieselbe Abschätzung mit dem Intervall $[x + h, x]$.

Wegen der Stetigkeit von f nähern sich Minimum und Maximum für $h \to 0$ dem Wert $f(x)$. Somit folgt:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x + h) - F_a(x)}{h} = F_a'(x).$$

Sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Da auch F_a eine Stammfunktion ist, gilt für eine Konstante C:

$$F_a(x) = F(x) + C.$$

Wegen $F_a(a) = 0$ folgt:

$$0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a).$$

Damit erhalten wir:

$$F_a(x) = F(x) - F(a).$$

Für $x = b$ folgt der Hauptsatz:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).}$$

Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen

Aus den bekannten Ableitungsregeln ergeben sich folgende Stammfunktionen:

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Summen und Differenzen von Funktionen

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

für unbestimmte Integrale gilt entsprechend:

$$\int \left[f(x) \pm g(x)\right] \mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + C \text{ wobei } F' = f \text{ und } G' = g.$$

Beispiel 3.1

$$\int (x + e^x)\,dx = \int x\,dx + \int e^x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + e^x + C$$

Funktionen mit konstanten Faktoren

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

für unbestimmte Integrale gilt entsprechend:

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha F(x) + C$$

wobei $F' = f$.

Beispiel 3.2

$$\int_0^{\pi/2} 4\cos(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 4\Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 4\Big[\sin(\pi/2) - \sin(0)\Big] = 4$$

Substitutionsregel

Sei f stetig und u eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Für unbestimmte Integrale gilt:

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C, \qquad F' = f.$$

Dies ist die Substitutionsregel 1. Art.

Die Regel ist hilfreich, wenn der Integrand die Form $f(u(x))\,u'(x)$ hat, gegebenenfalls bis auf einen konstanten Faktor.

Beispiel 3.3

$$\int_1^3 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \ldots \qquad u(x) = 2x \qquad u(1) = 2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \qquad u(3) = 6$$

$$\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}u$$

$$\cdots = \int_2^6 \mathrm{e}^u\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_2^6 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^u\right]_2^6 = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^2\right]$$

Beispiel 3.4

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(\pi/2) &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos x}$$

$$\ldots = \int_0^1 u\cos(x)\frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)} = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Beispiel 3.5

Lässt sich das Integral mithilfe einer einfachen Substitution auf ein elementares Integral zurückführen?

- $\int x e^{x^2}\,dx$ Ja, mit $u = x^2$
- $\int x \sin(x)\,dx$ Nein
- $\int x^3 \sqrt{x^4+1}\,dx$ Ja, mit $u = x^4 + 1$
- $\int x \ln x\,dx$ Nein
- $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ Ja, mit $u = \ln x$

Substitutionsregel 2. Art (optional)

In gewissen Situationen kann es vorteilhaft sein, die Integrationsvariable x durch eine differenzierbare und monotone Funktion $x(t)$ zu ersetzen.

Beispiel 3.6 (optional)

$$\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 1}\, dx = \ldots$$

$x(t) = \ln(t)$ (monoton) $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = e^0 = 1$

$dx = t^{-1}\, dt \qquad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2 = e^1 = e$

$$\ldots = \int_1^e e^{\ln(t)} \sqrt{e^{\ln(t)} + 1} \cdot t^{-1}\, dt = \int_1^e t\sqrt{t+1} \cdot t^{-1}\, dt$$

$$= \int_1^e (t+1)^{1/2}\, dt = \tfrac{2}{3}\left[(t+1)^{3/2}\right]_1^e = \tfrac{2}{3}\left[(e+1)^{3/2} - 2^{3/2}\right]$$

Partielle Integration

Ist der Integrand ein Produkt zweier Faktoren, so gibt es im Unterschied zur Differentiation keine allgemein gültige Regel, um das Integral eines Produkts auf die Integrale der Faktoren zurückzuführen.

Man kann aber eine Regel angeben, nach der in manchen Fällen ein schwierig zu lösendes Integral auf ein einfacheres zurückgeführt werden kann.

Die Produktregel der Differentiation lautet:

$$\big[f(x)\cdot g(x)\big]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Durch Integration über $[a, b]$ folgt:

$$\big[f(x)\cdot g(x)\big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Umstellen ergibt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)\cdot g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Für unbestimmte Integrale gilt entsprechend:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Beispiel 3.7

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \ldots \qquad \begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x \\ g(x) &= x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\ldots = \mathrm{e}^x x - \int \mathrm{e}^x \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x(x-1) + C$$

Beispiel 3.8

$$\int \ln x \, dx = ? \qquad f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x$$

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1/x$$

$$\int \ln x \cdot 1 \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

Beispiel 3.9

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = ? \qquad f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$

$$g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \cos x$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x$$

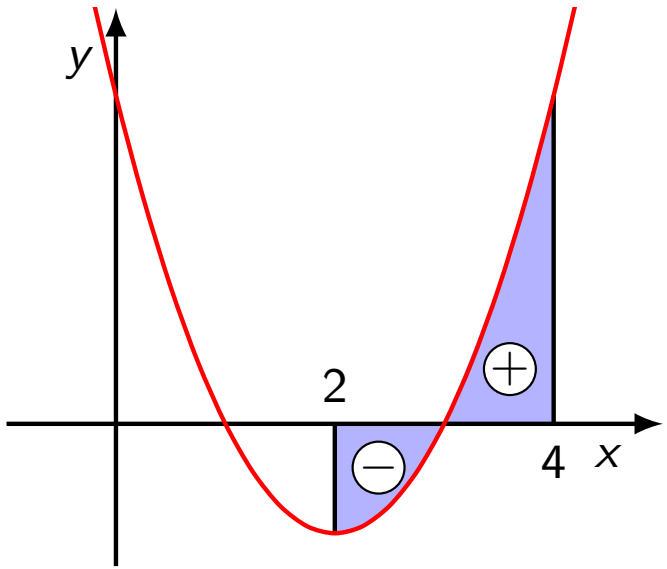
$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

Beispiel 4.1

Berechne das bestimmte Integral $\int_2^4 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^4 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_2^4 = \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3}$$

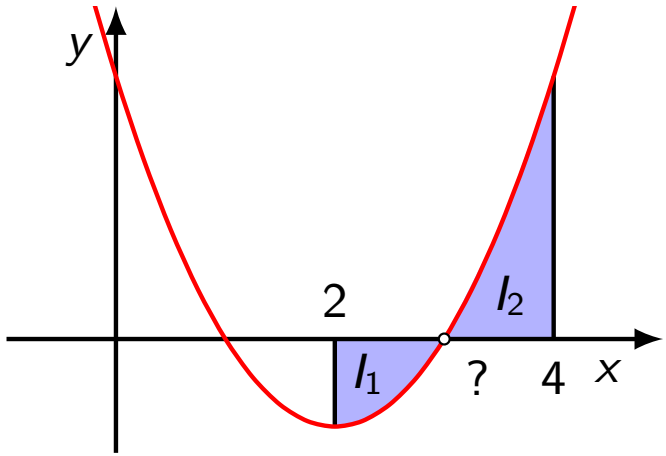


Für $a < b$ gilt: Flächen über der x-Achse tragen positiv zum Integral bei.
Flächen unter der x-Achse tragen negativ zum Integral bei.

Für $a > b$ kehrt sich wegen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ zusätzlich das Vorzeichen des Integrals um.

Beispiel 4.2

Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 4x + 3$, der x-Achse und den Geraden $x = 2$ sowie $x = 4$ begrenzt wird.



Da der Graph von f die x-Achse im Intervall $[2, 4]$ schneidet, müssen wir beide Teile separat integrieren.

Nullstellen: $0 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \Rightarrow N = \{1, 3\}$

Nur $x = 3$ liegt in $[2, 4]$:

$$I_1 = \int_2^3 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_2^3 = 0 - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_3^4 = \tfrac{4}{3} - 0 = \tfrac{4}{3}$$

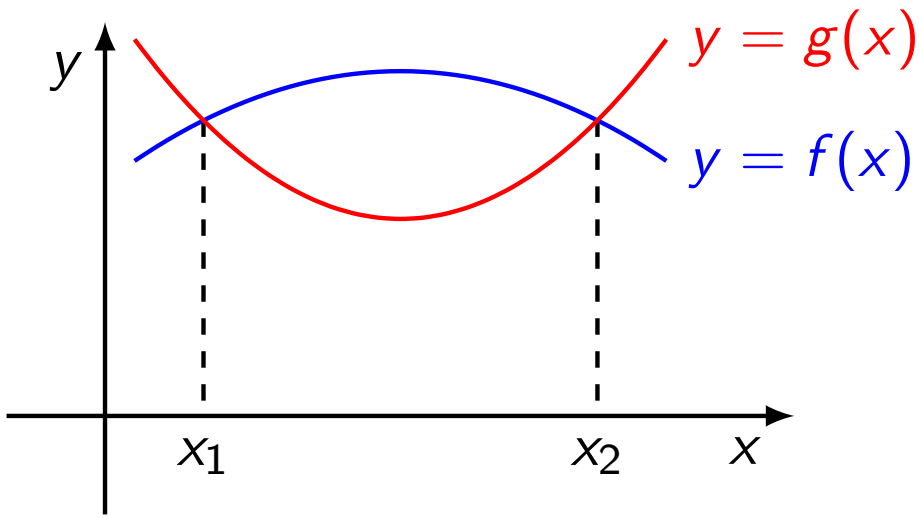
$$A = |I_1| + |I_2| = \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} = 2$$

Beispiel 4.3

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen

$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{8}$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$

begrenzt wird.



Lösungsweg 1: x-Koordinaten der Schnittpunkte:

$$-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{19}{8}=\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{17}{4} \quad || \cdot 8$$
$$-x^2+6x+19=2x^2-12x+34$$
$$0=3x^2-18x+15$$
$$x_1=1,\ x_2=5$$

Da beide Graphen im betrachteten Intervall oberhalb der x-Achse liegen und $f(x) \geq g(x)$ gilt, ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt als Differenz der beiden Integrale.

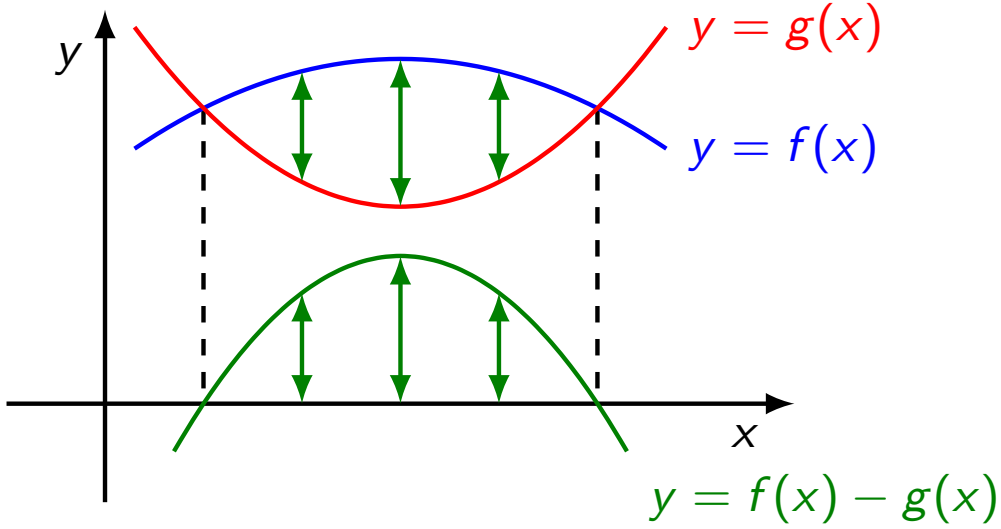
$$A_f=\int_1^5 \left(-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{19}{8}\right)\,\mathrm{d}x=\left[-\tfrac{1}{24}x^3+\tfrac{3}{8}x^2+\tfrac{19}{8}x\right]_1^5=\tfrac{40}{3}$$

$$A_g=\int_1^5 \left(\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{17}{4}\right)\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{17}{4}x\right]_1^5=\tfrac{28}{3}$$

$$A=A_f-A_g=\tfrac{40}{3}-\tfrac{28}{3}=\tfrac{12}{3}=4$$

Lösungsweg 2: Integriere die Differenzfunktion $f(x) - g(x)$

$$A = \int_1^5 \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x \qquad (\text{„toter Walfisch“})$$



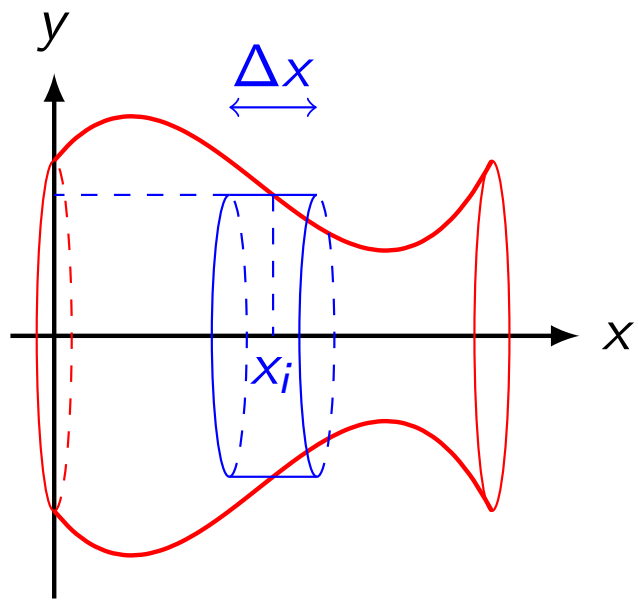
$$f(x) - g(x) = \cdots = -\tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{9}{4}x - \tfrac{15}{8}$$

$$\int_1^5 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \big(-\tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{9}{4}x - \tfrac{15}{8}\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \big[-\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{9}{8}x^2 - \tfrac{15}{8}x\big]_1^5 = 4$$

Hier muss nur eine Stammfunktion berechnet werden.

Dreht man die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper.



$r_i = f(x_i)$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

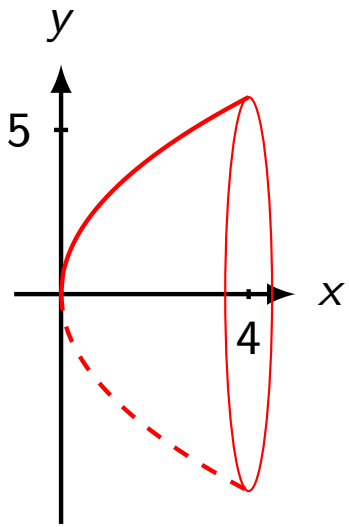
$$V_i = \pi \cdot r_i^2 \cdot \Delta x$$

Das Volumen eines Rotationskörpers ergibt sich als Grenzwert der Summe der Volumina dünner Zylinderscheiben mit $r_i = |f(x_i)|$ und $h = \Delta x$.

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 5.1

Der Graph der Funktion $f(x) = 3\sqrt{x}$ rotiert für $0 \leq x \leq 4$ um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers?



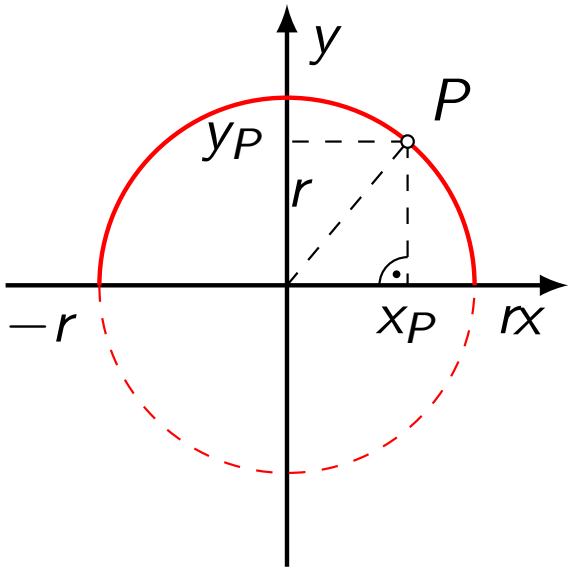
Der Rotationskörper entsteht durch Drehung der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^4 \left(3\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 9x\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\tfrac{9}{2}x^2\right]_0^4 = 72\pi$$

Beispiel 5.2

Leite mithilfe der Integralrechnung die Volumenformel einer Kugel mit Radius r her.



$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (beschreibt den oberen Halbkreis)

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) = 2\pi \cdot \tfrac{2}{3}r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$