

Taylorpolynome (PAM)

Übungen

Aufgabe 1

Entwickle die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sin x$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

Aufgabe 1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

Aufgabe 1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

Aufgabe 1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1$$

Aufgabe 1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$\dots = \dots \quad \Rightarrow \quad \dots = \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\sin(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\sin(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Aufgabe 2

Entwickle die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^5 an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

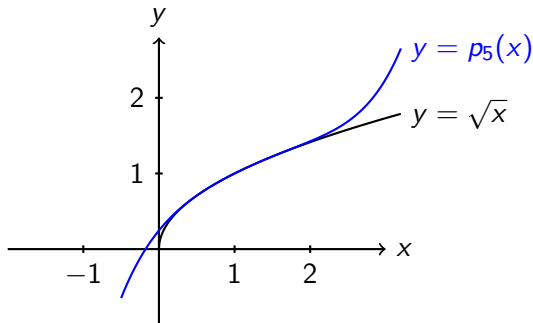
$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = \frac{105}{32}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5 - \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5 - \dots\end{aligned}$$



Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln x$.

- (a) Entwickle f nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 1$.
- (b) Berechne mit der Formel aus (a) und deinem Taschenrechner näherungsweise den Wert von $\ln 2$, indem du die Teilsummen für $n = 1, 2, 3, \dots, 200$ bestimmst und die Werte in einer Liste abspeicherst. Wie viele Stellen sind für $n = 200$ korrekt?

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6 = -3!$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = 24x^{-5} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = 24 = 4!$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = 24x^{-5} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = 24 = 4!$$

$$\dots\dots\dots \Rightarrow \dots = \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(x) = 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(x) = 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots$$

$$= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots$$

=

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(x) = 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots$$

$$= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x - 1)^{k+1}}{k + 1}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Bei der letzte Umformung wird die Summe bei $k = 1$ statt bei $k = 0$ gestartet, weshalb im allgemeinen Summanden zum Ausgleich k durch $k - 1$ ersetzt werden muss. Dies führt zu einer etwas einfachere Formel. Beachte $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

$$(b) \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$(b) \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

$$(b) \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

erst zwei signifikante Stellen.

Aufgabe 4

Berechne die Lösung der Gleichung $x^2 = e^x$ näherungsweise, indem du die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^3 an der Stelle $x_0 = 0$ entwickelst.

Aufgabe 4

$$x^2 = e^x$$

Aufgabe 4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Aufgabe 4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

Aufgabe 4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

Aufgabe 4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

$$x \approx -0.69889$$

Aufgabe 4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

$$x \approx -0.69889$$

Zum Vergleich die „exakte“ Lösung: -0.7035

Aufgabe 5

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion.

Aufgabe 5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Aufgabe 5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

Aufgabe 5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right)$$

Aufgabe 5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\&= 1\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Schreibe das Polynom $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ mit Hilfe des Satzes von Taylor um in die Form

$$p(x) = c_4(x - 1)^4 + c_3(x - 1)^3 + c_2(x - 1)^2 + c_1(x - 1) + c_0.$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} p(x) = & p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ & + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4 \end{aligned}$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4 \end{aligned}$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad p^{(4)}(1) = 24$$

Aufgabe 6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad p^{(4)}(1) = 24$$

$$p(x) = 8 + 17(x-1) + \frac{32}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 \\ = (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 16(x-1)^2 + 17(x-1) + 8$$

Aufgabe 7

Bestimme das Taylorpolynom $T_1 f(x; 0)$ für die Funktionen

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 7

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$T_1 f(x; 0) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 - 1 \cdot x = 1 - x$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$T_1 f(x; 0) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + 1 \cdot x = 1 + x$$