

Taylorpolynome (PAM)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Zeige, dass sich der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

nicht durch Einsetzen berechnen lässt und bestimme ihn
anschliessend mithilfe einer Taylorreihe aus der Formelsammlung.

Aufgabe 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?$$

Für $x = 0$: $\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ (unbestimmt)

Taylorreihe von e^x an der Stelle $x_0 = 0$:

$$Te^x(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} \\ &= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Zeige, dass sich der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

nicht durch Einsetzen berechnen lässt und bestimme ihn
anschliessend mithilfe einer Taylorreihe aus der Formelsammlung.

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

$$\text{Für } x = 0: \frac{\cos(0) - 1}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ (unbestimmt)}$$

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

Für $x = 0$: $\frac{\cos(0) - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$ (unbestimmt)

Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$:

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

Für $x = 0$: $\frac{\cos(0) - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$ (unbestimmt)

Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$:

$$T \cos(x)(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

$$\text{Für } x = 0: \frac{\cos(0) - 1}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ (unbestimmt)}$$

Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$:

$$T \cos(x)(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) - 1}{x^2}$$

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

$$\text{Für } x = 0: \frac{\cos(0) - 1}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ (unbestimmt)}$$

Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$:

$$T \cos(x)(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) - 1}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}{x^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?$$

$$\text{Für } x = 0: \frac{\cos(0) - 1}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ (unbestimmt)}$$

Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$:

$$T \cos(x)(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) - 1}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$ mithilfe der Taylorreihe $T_1 f(x; \frac{\pi}{3})$

Aufgabe 3

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$T_1 f\left(x; \frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = t(x)$$

Aufgabe 4

Bestimme das Taylorpolynom dritten Grades $T_3f(x; 1)$ der Funktion $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 5$ an der Stelle $x_0 = 1$ und untersuche anhand dieses Polynoms den lokalen Kurvenverlauf.

Aufgabe 4

Entwicklungsstelle: $x_0 = 1$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 5 \quad f(1) = 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 10x - 5 \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 10 \quad f''(1) = 4$$

$$f'''(x) = 24x - 18 \quad f'''(1) = 6$$

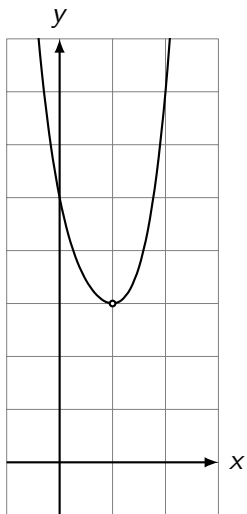
$$T_3 f(x; 1) = 3 + 0(x - 1) + 2(x - 1)^2 + 1(x - 1)$$

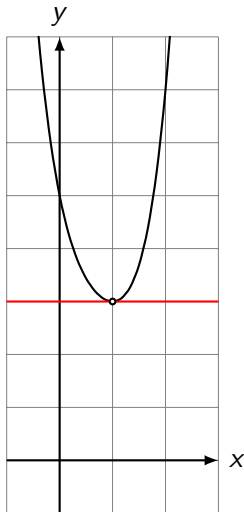
$\Rightarrow f$ hat im Punkt $(1, 3)$ ein lokales Minimum

Für Polynome können die Taylorkoeffizienten effizient mit dem Horner-Schema berechnet werden:

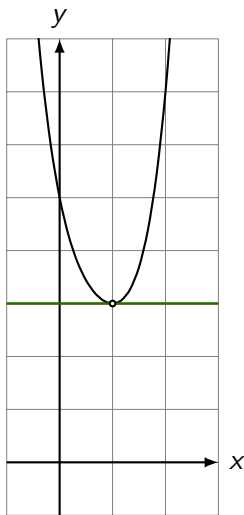
x_0	a_4	-3	5	-5	5
1	1	-2	3	-2	3
1	1	-1	2	0	-
1	1	0	2	-	-
1	1	1	-	-	-
1	1	-	-	-	-

(nicht verlangt)



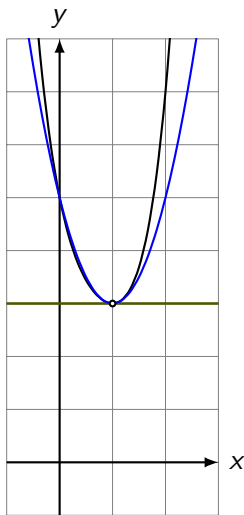


$$T_0(f; 1) = 3$$



$$T_0(f; 1) = 3$$

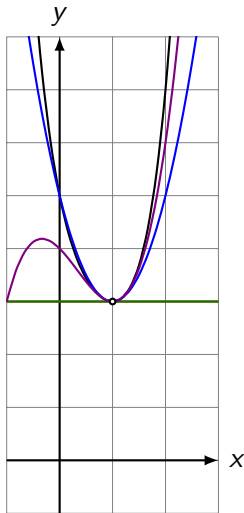
$$T_1(f; 1) = T_0(f; 1) + 0(x - 1)$$



$$T_0(f; 1) = 3$$

$$T_1(f; 1) = T_0(f; 1) + 0(x - 1)$$

$$T_2(f; 1) = T_1(f; 1) + 2(x - 1)^2$$

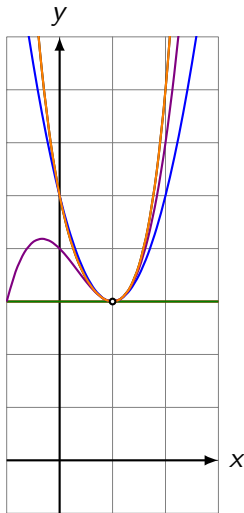


$$T_0(f; 1) = 3$$

$$T_1(f; 1) = T_0(f; 1) + 0(x - 1)$$

$$T_2(f; 1) = T_1(f; 1) + 2(x - 1)^2$$

$$T_3(f; 1) = T_2(f; 1) + 1(x - 1)^3$$



$$T_0(f; 1) = 3$$

$$T_1(f; 1) = T_0(f; 1) + 0(x - 1)$$

$$T_2(f; 1) = T_1(f; 1) + 2(x - 1)^2$$

$$T_3(f; 1) = T_2(f; 1) + 1(x - 1)^3$$

$$T_4(f; 1) = T_3(f; 1) + 1(x - 1)^4 = f(x)$$

Aufgabe 5

Das in der Statistik häufig auftretende Integral

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

besitzt keine elementare Stammfunktion. Daher ist man auf eine Näherungslösung angewiesen. Entwickle den Integranden in eine Potenzreihe und integriere diese gliedweise.

Aufgabe 5

$$e^{-t^2} = 1 + (-t^2) + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \frac{(-t^2)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots \right) dt$$

$$= \int_0^x 1 dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x \frac{t^4}{2!} dt - \int_0^x \frac{t^6}{3!} dt + \int_0^x \frac{t^8}{4!} dt - \dots$$

$$= [t]_0^x - \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x + \left[\frac{t^5}{5 \cdot 2!} \right]_0^x - \left[\frac{t^7}{7 \cdot 3!} \right]_0^x + \left[\frac{t^9}{9 \cdot 4!} \right]_0^x - \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots$$