Taylorpolynome

Übungen

Formel von Taylor

$$T_n f(x; x_0) =$$
$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

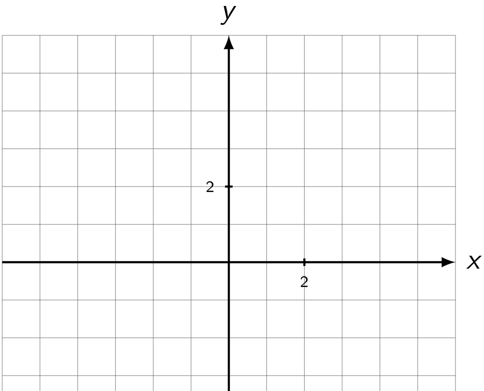
Formel von Taylor

$$T_n f(x; x_0) =$$
$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Aufgabe 1

Bestimme die Taylorpolynome der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ an den gegebenen Stellen und skizziere damit den Graphen von f in das vorbereitete Koordinatensystem.

- $T_1 f(x; 0) =$
- $T_1 f(x; 2) =$
- $T_1 f(x; 4) =$

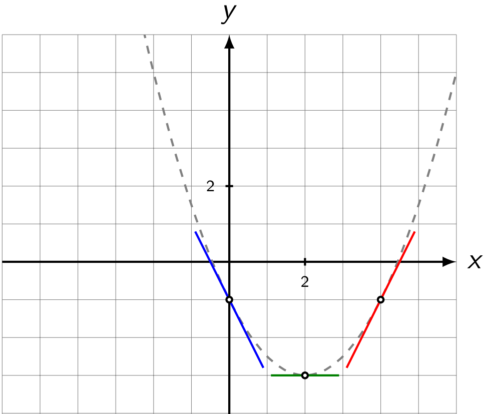


Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$

$$f'(x) = x - 2$$

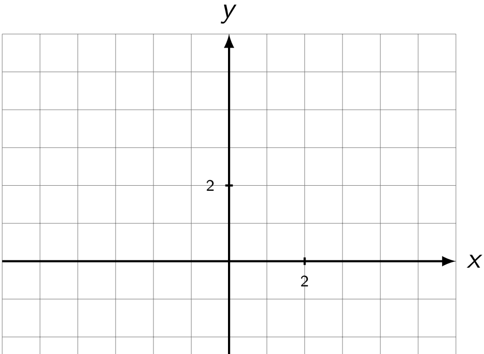
- $T_1 f(x; 0) = f(0) + f'(0)(x - 0) = -1 - 2x$
- $T_1 f(x; 2) = f(2) + f'(0)(x - 2) = -3 + 0(x - 2)$
- $T_1 f(x; 4) = f(4) + f'(4)(x - 4) = -1 + 2(x - 4)$



Aufgabe 2

Bestimme die Taylorpolynome der Funktion
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ an den gegebenen Stellen und skizziere damit den Graphen von f in das vorbereitete Koordinatensystem.

- $T_2 f(x; -2) =$
- $T_2 f(x; -1) =$
- $T_3 f(x; 1) =$
- $T_2 f(x; 3) =$



Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

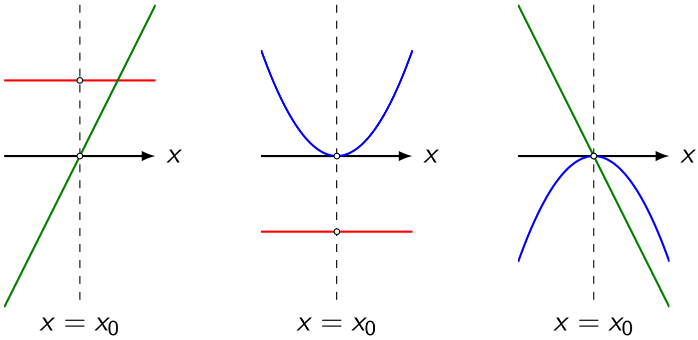
$$f''(x) = 2x - 2$$

$$f'''(x) = 2$$

- $$\begin{aligned} T_2 f(x; -2) &= f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{1}{2} f''(-2)(x+2)^2 \\ &= \frac{4}{3} + 5(x+2) - 6(x+2)^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T_2 f(x; -1) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2} f''(-1)(x+1)^2 \\ &= \frac{11}{3} + 0(x+1) - 4(x+1)^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T_3 f(x; 1) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6} f'''(1)(x-1)^2 \\ &= -\frac{5}{3} - 4(x-1) - 0(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T_2 f(x; 3) &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{1}{2} f''(3)(x-3)^2 \\ &= -7 + 0(x-3) + 4(x-3)^2 \end{aligned}$$

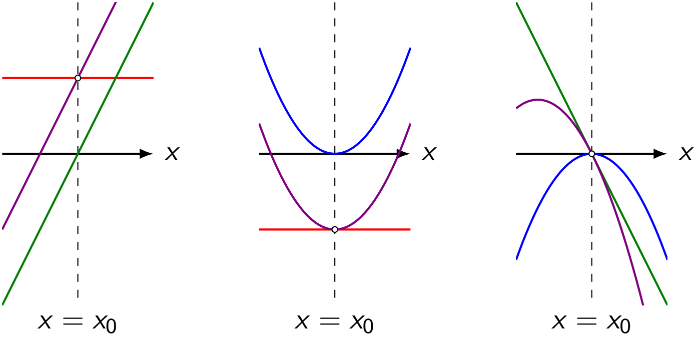
Aufgabe 3

Skizziere die Summe der Monome in der Umgebung von x_0.



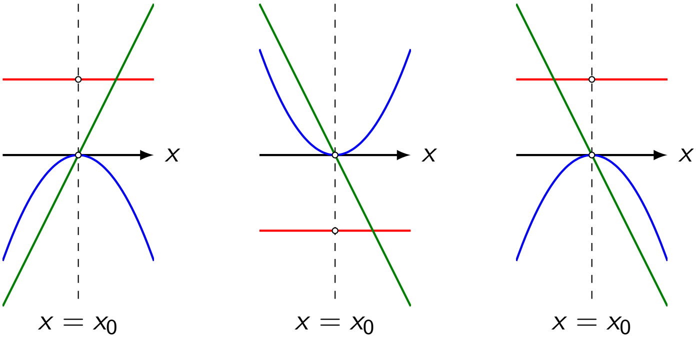
Aufgabe 3

Skizziere die Summe der Monome in der Umgebung von x_0.



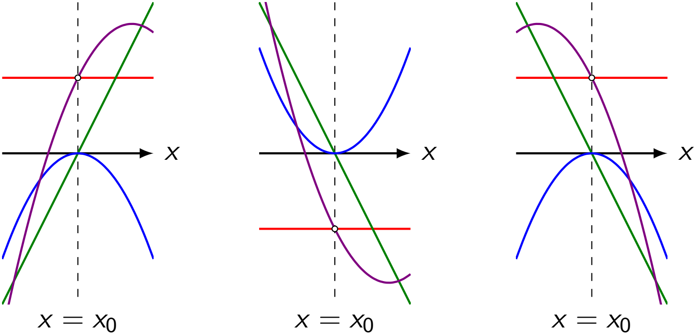
Aufgabe 4

Skizziere die Summe der Monome in der Umgebung von x_0.



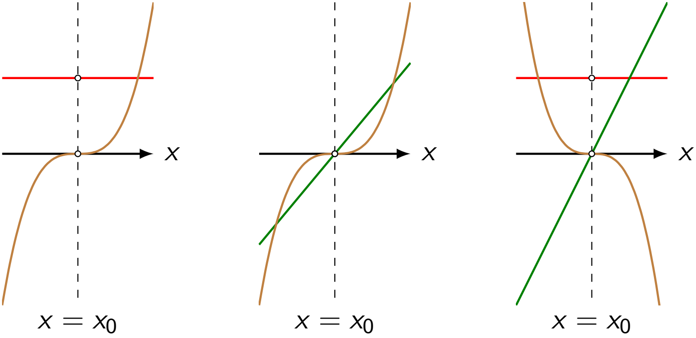
Aufgabe 4

Skizziere die Summe der Monome in der Umgebung von x_0.



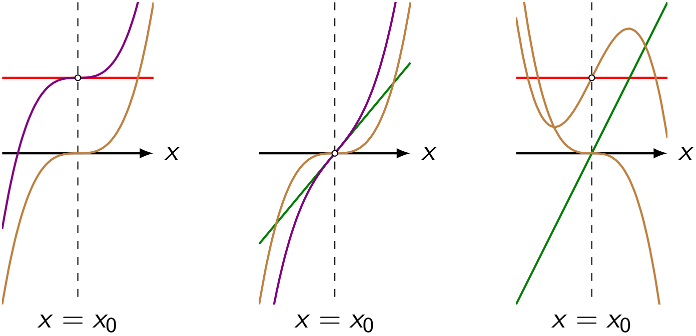
Aufgabe 5

Skizziere die Summe der Monome in der Umgebung von x_0.



Aufgabe 5

Skizziere die Summe der Monome in der Umgebung von x_0.



Aufgabe 6

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte von f und skizziere den Graphen für $-1 \leq x \leq 4$ und $-2 \leq y \leq 4$ mit 3 Häuschen pro Einheit.

Aufgabe 6

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Aufgabe 6

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ f''(x) &= 2x - 4 \\ f'''(x) &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ f''(x) &= 2x - 4 \\ f'''(x) &= 2 \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ f''(x) &= 2x - 4 \\ f'''(x) &= 2 \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty \end{aligned}$$

Nullstellen:
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ x &= -0.279 \end{aligned}$$

Extrempunkte:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Extrempunkte:} \qquad f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

x_0	a_3	-2	3	1
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3} = f(1)$
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$0 = f'(1)$	
1	$\frac{1}{3}$	$-1 = \frac{1}{2} f''(1)$		

$$\begin{aligned} \text{Extrempunkte:} \qquad f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

x_0	a_3	-2	3	1
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3} = f(1)$
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$0 = f'(1)$	
1	$\frac{1}{3}$	$-1 = \frac{1}{2}f''(1)$		

$\Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(1, \frac{7}{3})$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

x_0	a_3	-2	3	1
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3} = f(1)$
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$0 = f'(1)$	
1	$\frac{1}{3}$	$-1 = \frac{1}{2}f''(1)$		

$\Rightarrow \quad \text{HoP}(1, \frac{7}{3})$

x_0	a_3	-2	3	1
3	$\frac{1}{3}$	-1	0	$1 = f(3)$
3	$\frac{1}{3}$	0	$0 = f'(3)$	
3	$\frac{1}{3}$	$1 = \frac{1}{2}f''(3)$		

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

x_0	a_3	-2	3	1
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3} = f(1)$
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$0 = f'(1)$	
1	$\frac{1}{3}$	$-1 = \frac{1}{2}f''(1)$		

$\Rightarrow \quad \text{HoP}(1, \frac{7}{3})$

x_0	a_3	-2	3	1
3	$\frac{1}{3}$	-1	0	$1 = f(3)$
3	$\frac{1}{3}$	0	$0 = f'(3)$	
3	$\frac{1}{3}$	$1 = \frac{1}{2}f''(3)$		

$\Rightarrow \quad \text{TiP}(3, 1)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wendepunkte:} \quad f''(x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

x_0	a_3	-2	3	1
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3} = f(2)$
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-1 = f'(2)$	
2	$\frac{1}{3}$	$0 = \frac{1}{2} f''(2)$		
2	$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} f'''(2)$			

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{(Kandidat)}$$

x_0	a_3	-2	3	1
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3} = f(2)$
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-1 = f'(2)$	
2	$\frac{1}{3}$	$0 = \frac{1}{2}f''(2)$		
2	$\frac{1}{3} = \frac{1}{6}f'''(2)$			

$\Rightarrow$ $\text{WeP}(2, \frac{5}{3})$

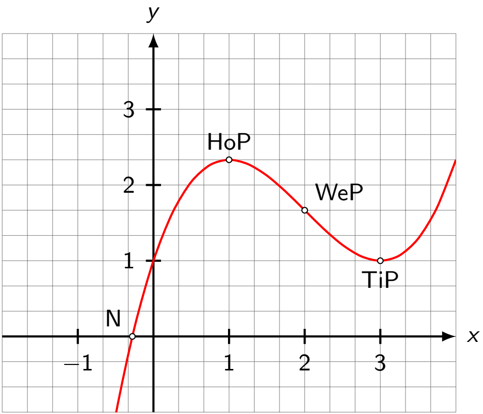
Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{(Kandidat)}$$

x_0	a_3	-2	3	1
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3} = f(2)$
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-1 = f'(2)$	
2	$\frac{1}{3}$	$0 = \frac{1}{2} f''(2)$		
2	$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} f'''(2)$			

$\Rightarrow$ WeP$(2, \frac{5}{3})$


y
x
HoP
WeP
TiP
N
3
2
1
−1
1
2
3

Aufgabe 7

Gegeben: $f(x) = f(x) = x^4 - 4x^3$

Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte von f und skizziere den Graphen für $-1 \leq x \leq 5$ (4 Häuschen/Einheit) und $-30 \leq y \leq 10$ (1 Häuschen/10 Einheiten).

Aufgabe 7

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4) \\
f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \\
f''(x) &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \\
f'''(x) &= 24x - 24 = 24(x-1)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4) \\
f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \\
f''(x) &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \\
f'''(x) &= 24x - 24 = 24(x-1)
\end{aligned}
$$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^4) = \infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^4) = \infty$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4) \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \\ f'''(x) &= 24x - 24 = 24(x-1) \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4) = \infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^4) = \infty$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^2(x-3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Extrempunkte:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^2(x-3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -24$

$\Rightarrow$ TeP(0,0)

Extrempunkte: $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^2(x-3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -24$

$\Rightarrow$ TeP(0,0)

$x = 3$: $f(3) = -27$, $f'(3) = 0$, $f''(3) = 36 > 0$

$\Rightarrow$ TiP(3,-27)

Wendepunkte:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x(x-2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(wurde bereits untersucht)} \\ x_2 &= 2 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wendepunkte:} \qquad f''(x) &= 0 \\ 12x(x-2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(wurde bereits untersucht)} \\ x_2 &= 2 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$x = 2$: $f(2) = 0$, $f'(0) = -16$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 24 > 0$

$\Rightarrow$ WeP(2,-16)

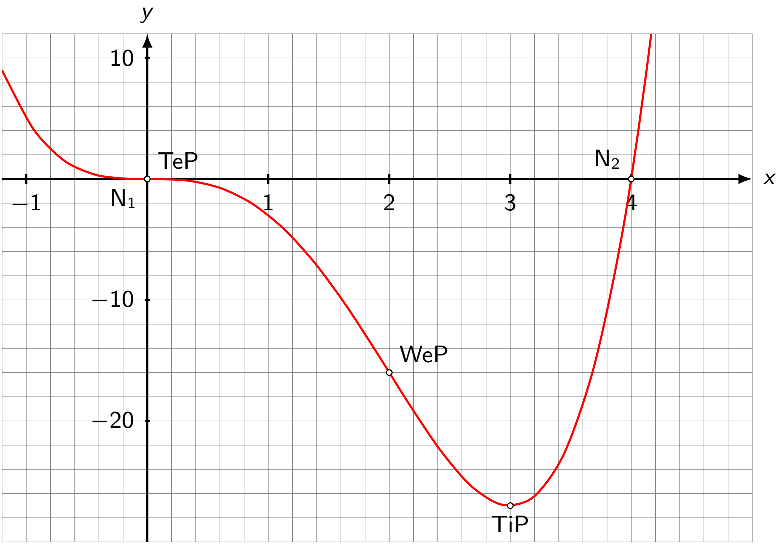
Wendepunkte:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x(x-2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(wurde bereits untersucht)} \\ x_2 &= 2 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$x = 2$: $f(2) = 0$, $f'(0) = -16$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 24 > 0$

$\Rightarrow$ WeP(2,-16)

$x = 3$: $f(3) = -27$, $f'(3) = 0$, $f''(3) = 36 > 0$

$\Rightarrow$ TiP(3,-27)



y
x
10
−10
−20
−1
1
2
3
4
TeP
N₁
N₂
WeP
TiP

Aufgabe 8

Gegeben: $f(x) = x^4 - x$

Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte von f und skizziere den Graphen für $-1 \leq x \leq 1.5$ (10 Häuschen/Einheit) und $-1 \leq x \leq 1$ (10 Häuschen/Einheit)

Aufgabe 8

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x = x(x^3 - 1) \\
f'(x) &= 4x^3 - 1 \\
f''(x) &= 12x^2 \\
f'''(x) &= 24x \\
f^{(4)}(x) &= 24
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x = x(x^3 - 1) \\ f'(x) &= 4x^3 - 1 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ f'''(x) &= 24x \\ f^{(4)}(x) &= 24 \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4) = \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^4) = \infty$$

Aufgabe 8

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x = x(x^3 - 1) \\
f'(x) &= 4x^3 - 1 \\
f''(x) &= 12x^2 \\
f'''(x) &= 24x \\
f^{(4)}(x) &= 24
\end{aligned}
$$

Asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4) = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^4) = \infty$

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x(x^3 - 1) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Extrempunkte:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
4x^3 - 1 &= 0 \\
x &= \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.630
\end{aligned}
$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 1 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.630$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}: \; f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = -0.472, \; f'\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = 0, \; f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = 4.762$$

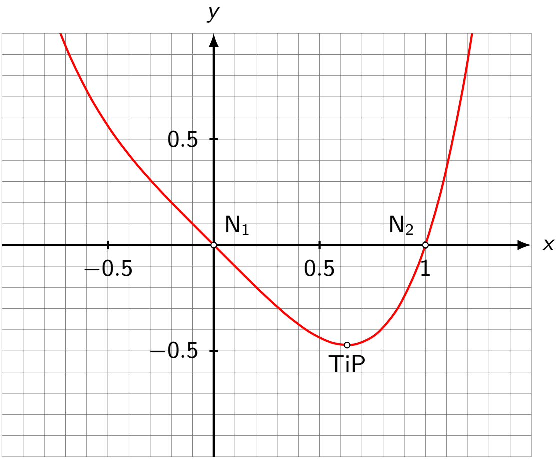
$\Rightarrow \quad \text{TiP}(0.630, -0.472)$

$$\begin{aligned} \text{Wendepunkte: } f''(x) &= 0 \\ 12x^2 &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Wendepunkte: } f''(x) &= 0 \\
12x^2 &= 0 \\
x &= 0 \quad \text{(Kandidat)}
\end{aligned}
$$

$x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24$

$\Rightarrow$ $(0, 0)$ ist kein Wendepunkt (Kurve fallend und linksgekrümmt)


y
x
0.5
−0.5
−0.5
0.5
1
N1
N2
TiP

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte von f und skizziere den Graphen für $-4 \leq x \leq 4$ (2 Häuschen/Einheit) und $-3 \leq x \leq 7$ (2 Häuschen/Einheit)

Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6 \\
f'(x) &= 2x^3 - 8x \\
f''(x) &= 6x^2 - 8 \\
f'''(x) &= 12x
\end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6 \\ f'(x) &= 2x^3 - 8x \\ f''(x) &= 6x^2 - 8 \\ f'''(x) &= 12x \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4) = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^4) = \infty$

Aufgabe 9

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$$
$$f'(x) = 2x^3 - 8x$$
$$f''(x) = 6x^2 - 8$$
$$f'''(x) = 12x$$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^4) = \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^4) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6 &= 0 \\ x^4 - 8x^2 + 12 &= 0 \\ (x^2-2)(x^2-6) &= 0 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2} \approx 1.414 \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{6} \approx 2.449 \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x^3 - 8x &= 0 \\ 2x(x^2 - 4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Extrempunkte: $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x^3 - 8x &= 0 \\ 2x(x^2 - 4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$x = 0$: $f(0) = 6$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -8$

$\Rightarrow \quad \text{HoP}(0, 6)$

Extrempunkte:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x^3 - 8x &= 0 \\ 2x(x^2 - 4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$x = 0$: $f(0) = 6$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -8$

$\Rightarrow \quad \text{HoP}(0, 6)$

$x = -2$: $f(-2) = -2$, $f'(0) = 0$ $f''(-2) = 16$

$\Rightarrow \quad \text{TiP}_1(-2, -2)$

$$
\begin{aligned}
\text{Extrempunkte:} \qquad f'(x) &= 0 \\
2x^3 - 8x &= 0 \\
2x(x^2 - 4) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= -2 \\
x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

$x = 0$: $f(0) = 6$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -8$

$\Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(0, 6)$

$x = -2$: $f(-2) = -2$, $f'(0) = 0$ $f''(-2) = 16$

$\Rightarrow \quad \mathrm{TiP}_1(-2, -2)$

$x = 2$: $f(2) = 6$, $f'(0) = 0$ $f''(2) = 16$

$\Rightarrow \quad \mathrm{TiP}_2(2, -2)$

Wendepunkte: $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x^2 - 8 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}} \approx \pm 1.16 \end{aligned}$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$6x^2 - 8 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1.16$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{4}{3}}\text{: } f\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = 1.56,\ f'\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = 6.16,$$

$$f''\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = 0,\ f'''\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = -13.16$$

$\Rightarrow \mathrm{WeP}_1(-1.16, 1.56) \quad (\mathrm{LK} \rightarrow \mathrm{RK})$

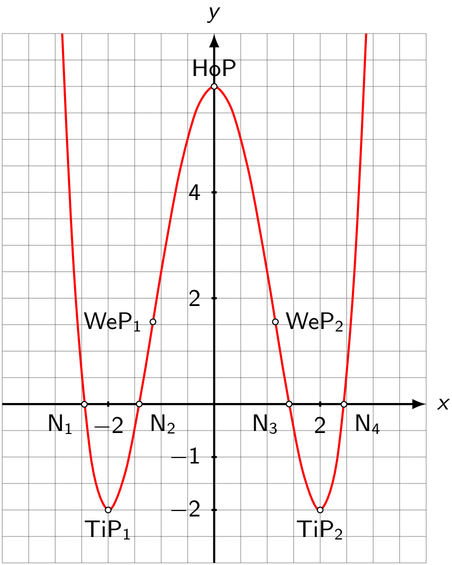
$$\text{Wendepunkte:} \quad f''(x) = 0$$
$$6x^2 - 8 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}} \approx \pm 1.16$$

$x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$: $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 1.56$, $f'\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6.16$, $f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0$, $f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -13.16$

$\Rightarrow \mathrm{WeP}_1(-1.16, 1.56) \quad (\mathrm{LK} \to \mathrm{RK})$

$x = \sqrt{\frac{4}{3}}$: $f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 1.56$, $f'\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6.16$, $f''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0$, $f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 13.16$

$\Rightarrow \mathrm{WeP}_2(1.16, 1.56) \quad (\mathrm{RK} \to \mathrm{LK})$


y
HoP
4
2
WeP$_1$
WeP$_2$
x
N$_1$
−2
N$_2$
N$_3$
2
N$_4$
−1
−2
TiP$_1$
TiP$_2$