

Ist f eine Funktion, die in einer Umgebung U von $x_0 = 0$ unendlich oft differenzierbar ist, werden Koeffizienten a_0, a_1, a_3, \dots , gesucht, so dass sich f für $x \in U$ durch eine Folge von Polynomen approximieren lässt:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Die Bestimmung der Koeffizienten

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + 120a_6x^3 + \dots$$

$$f^{(4)}(x) = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + 840a_7x^3 + \dots$$

$$\dots = \dots$$

$x = 0$ einsetzen und nach a_i auflösen:

$$f(0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(0)$$

$$f'(0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(0)$$

$$f''(0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = f''(0)/2$$

$$f'''(0) = 6a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = f'''(0)/6$$

$$f^{(4)}(0) = 24a_4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = f^{(4)}(0)/24$$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

Die Maclaurin-Reihe (Colin Maclaurin 1698–1746)

Ist f eine in der Umgebung von $x = 0$ unendlich oft differenzierbare Funktion, so gilt:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \dots$$

Drückt man die Divisoren

$$1, 1, 2, 6, 24, \dots$$

durch die Fakultäten

$$0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \dots$$

aus, erhält man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Beispiel 1

Bestimme die Maclaurin-Reihe von $f(x) = e^x$.

- $a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1$
- $a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$
- $a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$
- $a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$
- usw.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{24} + \dots$$

Die Taylor-Reihe

Verwendet man als Ausgangsstelle für die Reihenentwicklung nicht 0 sondern eine beliebige Stelle x_0 ,



so erhält man durch eine Variablentransformation aus der Maclaurin-Reihe die *Taylor-Reihe* von f :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

(Brook Taylor, britischer Mathematiker, 1685–1731)

Beispiel 2

Bestimme die Taylorreihe von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(x) &\Rightarrow f(1) = 0 \\ f'(x) = 1/x = x^{-1} &\Rightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} &\Rightarrow f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2x^{-3} &\Rightarrow f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -6x^{-3} &\Rightarrow f^{(4)}(1) = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \frac{0}{1} + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4 + \dots \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \end{aligned}$$