

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
& 4amx + mx - 8any - 2ny + 4amy + my - 8anx - 2nx \\
&= mx(4a + 1) - 2ny(4a + 1) + my(4a + 1) - 2nx(4a + 1) \\
&= (4a + 1)(mx - 2ny + my - 2nx) \\
&= (4a + 1)(m(x + y) - 2n(y + x)) \\
&= (4a + 1)(x + y)(m - 2n)
\end{aligned}$$

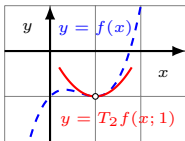
Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2x^2 + x - 1 & \Rightarrow & f(1) = -1 \\
f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 & \Rightarrow & f'(1) = 0 \\
f''(x) &= 6x - 4 & \Rightarrow & f''(1) = 2
\end{aligned}$$

Bei der 2. Ableitung stoppen, da $T_2f(x; x_0)$ verlangt ist.

$$\begin{aligned}
T_2f(x; 1) &= \frac{f(1)}{0!}(x - 1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 \\
&= -1 + (x - 1)^2
\end{aligned}$$

$T_2f(x; 1)$ wurde in der ersten Zeile vollständig ausgeschrieben, um die einheitliche Struktur des Taylorpolynoms sichtbar zu machen, die etwas in den Hintergrund rückt, wenn man sie mit $0! = 1! = 1$ und $(x - 1)^0 = 1$ und $(x - 1)^1 = (x - 1)$ wie üblich vereinfacht. Es ist auch nicht üblich, die Potenzen $(x - 1)^n$ auszumultiplizieren, da $(x - 1)$ nur eine horizontale Verschiebung des Polynoms um 1 nach rechts ausdrückt.

**Aufgabe 3**

(a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$

ersetze: $x \rightarrow (x - 4)$

$$g(x) = 2(x - 4)^4 - 3(x - 1)^2 + 5$$

(b) $f(x) = (x - 1)^3 - 3(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 9$

ersetze: $x \rightarrow (x + 3)$

$$g(x) = (x + 2)^3 - 3(x + 2)^2 + 2(x + 2) + 9$$

Aufgabe 4

(a)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
3	-1	-2	1	$\frac{1}{3}$

Die Kurve ist im Punkt $(3, -1)$ wegen $f'(3) < 0$ *fallend* und wegen $f''(3) > 0$ *linksgekrümmt*.

(b)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
2	1	0	0	-1

Die Kurve hat im Punkt $(2, 1)$ eine horizontale Tangente, und ihre Krümmung ändert wegen $f''(2) = 0$ und $f'''(2) < 0$ von einer Links- in eine Rechtskurve. Somit handelt es sich um einen *Terrassenpunkt*.

(c)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
-5	3	0	-2	$\frac{1}{2}$

Die Kurve hat im Punkt $(-5, 3)$ wegen $f'(-5) = 0$ eine horizontale Tangente und ist wegen $f''(-5) < 0$ rechtsgekrümmt. Somit handelt es sich um einen *Hochpunkt*.

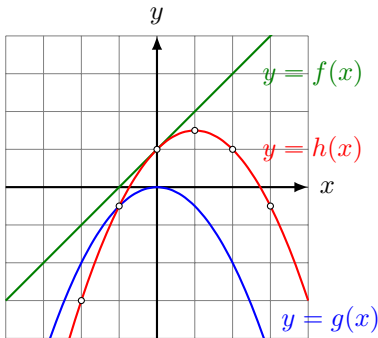
(d)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
1	1	2	0	1

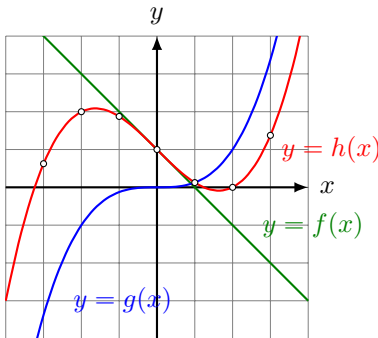
Die Kurve hat im Punkt $(1, 1)$ eine steigende Tangente und ändert wegen $f''(1) = 0$ und $f'''(1) > 0$ von einer Rechts- in eine Linkskurve. Somit handelt es sich um einen *Wendepunkt*.

Aufgabe 5

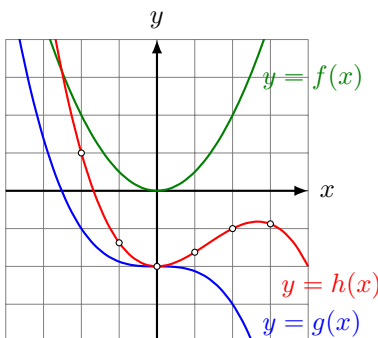
(a)



(b)

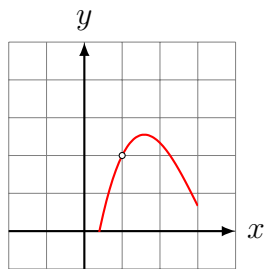


(c)

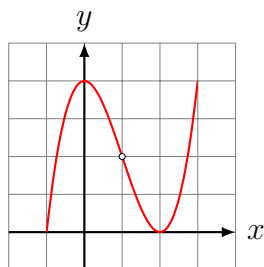


Aufgabe 6

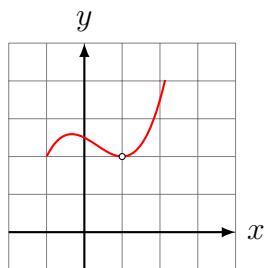
(a)	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
	1	2	2	-2	$\frac{1}{3}$



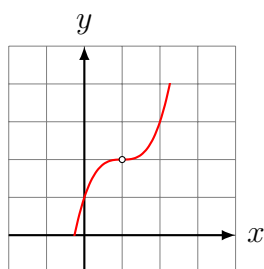
(b)	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
	1	2	-3	0	1



(c)	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
	1	2	0	1	$\frac{1}{2}$



(d)	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
	1	2	0	0	1



Aufgabe 7

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 7x - 2$$

x_0	a_4	-6	7	7	-2
3	1	-3	-2	1	1
3	1	0	-2	-5	
3	1	3	7		
3	1	6			

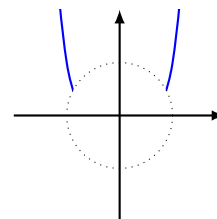
$$\Rightarrow f(3) = 1, f'(3) = -5, \frac{f''(3)}{2} = 7, \frac{f'''(3)}{6} = 6$$

Aufgabe 8

(a) $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 3x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^6) = +\infty$$

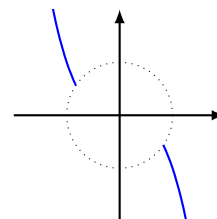
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^6) = +\infty$$



(b) $f(x) = -4x^3 - 9x^2 - x + 5$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty$$



Aufgabe 9

(a) $1.67x^2 + 0.283x + 0.47 = 0$

Keine reellen Lösungen

$x_1 = -0.0847 + 0.5237i$ und $x_2 = -0.0847 - 0.5237i$ sind komplexe Lösungen.

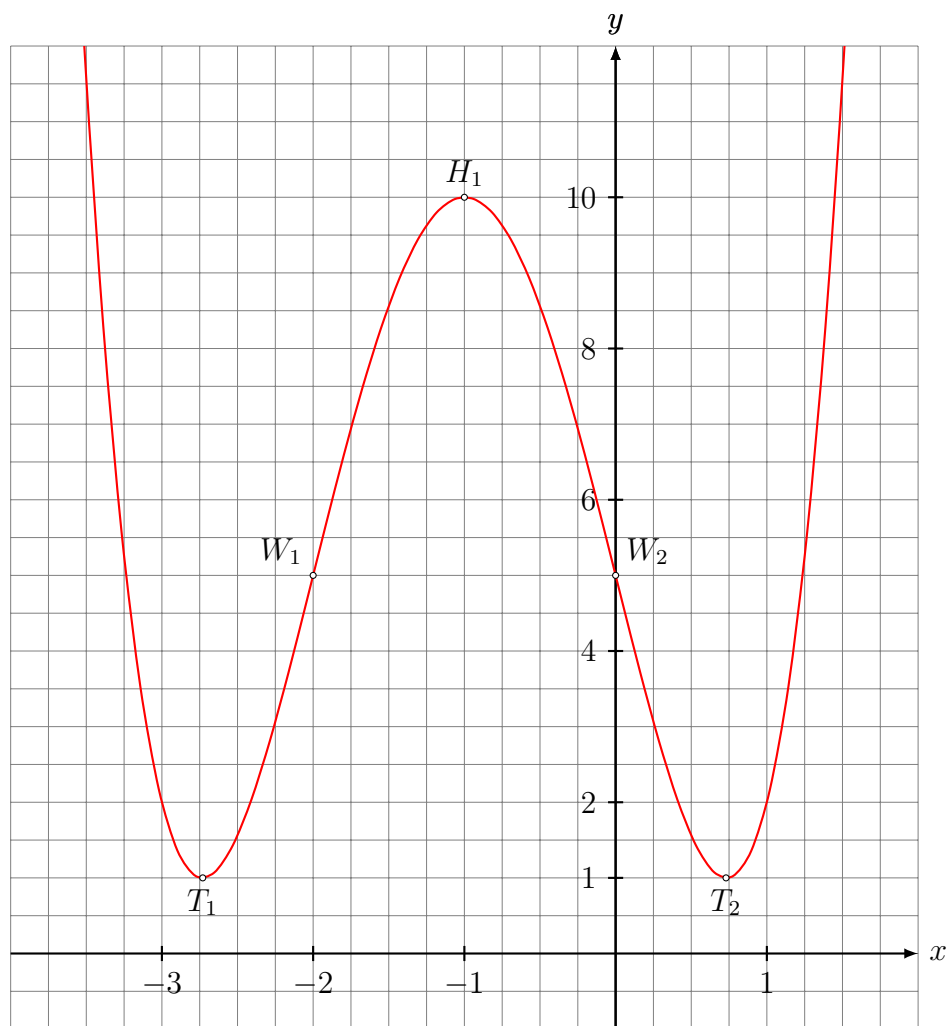
(b) $3.6x^3 + 4.19x^2 + 8.33x + 4.01 = 0$

Reelle Lösung: $x_1 = -0.5638$

$x_2 = -0.3 + 1.3732i$ und $x_3 = -0.3 - 1.3732i$ sind komplexe Lösungen.

Aufgabe 10

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2}$	$\frac{f'''(x_0)}{6}$	
-2.73	1	0	12	-6.9	T_1
-2	5	8	0	-4	W_1
-1	9	0	-6	0	H_1
0	5	-8	0	4	W_2
0.73	1	0	12	6.9	T_2



Aufgabe 11

$$f: y = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$$

asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \infty$$

$$\text{Ordinatenabschnitt: } f(0) = -7$$

$$\text{Nullstelle: } x \approx 4.28 \text{ (poly-solv)}$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

$$\text{Extrempunkte: } f'(x) = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$3(x-1)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad (\text{Kandidat})$$

$$x_2 = 3 \quad (\text{Kandidat})$$

$$f'(1) = 0 \text{ und } f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1, -3)$$

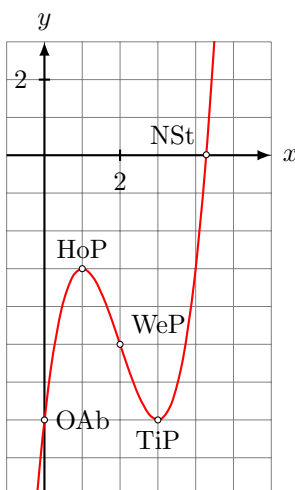
$$f'(3) = 0 \text{ und } f''(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(3, -7)$$

$$\text{Wendepunkte: } f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

$$x = 2 \quad (\text{Kandidat})$$

$$f''(2) = 0 \text{ und } f'''(2) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(2, -5)$$



Aufgabe 12

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 = x^3\left(\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4)$$

$$f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 24x + 8)$$

$$f'''(x) = 12x^2 - 24x + 8$$

asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = \infty$$

Nullstelle(n):

$$\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 = 0$$

$$x^3\left(\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$x = 0 \quad (\text{Die anderen L\u00f6sungen sind komplex.})$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x^2(x - 2)(x - 2) = 0 \quad (\text{oder mit TR})$$

$$x_1 = 0 \quad (\text{Kandidaten})$$

$$x_2 = 2$$

$$f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) = 0 \text{ und } f'''(0) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}_1(0, 0)$$

$$f'(2) = 0 \text{ und } f''(2) = 0 \text{ und } f'''(2) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}_2\left(2, \frac{2}{15}\right)$$

Wegen $f''(0) = f''(2) = 0$ mussten wir $f'''(0)$ und $f'''(2)$ herbeiziehen.

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$4x(x^2 - 24x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (\text{Kandidaten})$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

Die Stellen $x = 0$ und $x = 2$ wurden bereits oben analysiert.

$$f''(1) = 0 \text{ und } f'''(1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}\left(2, \frac{8}{15}\right)$$

