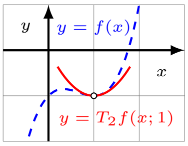
Aufgabe 1

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = -1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0$$
$$f''(x) = 6x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 2$$

Bei der 2. Ableitung stoppen, da $T_2 f(x; x_0)$ verlangt ist.

$$\begin{aligned} T_2 f(x;1) &= \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= -1 + (x-1)^2 \end{aligned}$$

$T_2 f(x;1)$ wurde in der ersten Zeile vollständig ausgeschrieben, um die einheitliche Struktur des Taylorpolynoms sichtbar zu machen, die etwas in den Hintergrund rückt, wenn man sie mit $0! = 1! = 1$ und $(x-1)^0 = 1$ und $(x-1)^1 = (x-1)$ wie üblich vereinfacht. Es ist auch nicht üblich, die Potenzen $(x-1)^n$ auszumultiplizieren, da $(x-1)$ nur eine horizontale Verschiebung des Polynoms um 1 nach rechts ausdrückt.



Aufgabe 2

(a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$

ersetze: $x \to (x-4)$

$g(x) = 2(x-4)^4 - 3(x-1)^2 + 5$

(b) $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 9$

ersetze: $x \to (x+3)$

$g(x) = (x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 2(x+2) + 9$

Aufgabe 3

(a)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
3	-1	-2	1	$\frac{1}{3}$

Die Kurve ist im Punkt $(3, -1)$ wegen $f'(3) < 0$ *fallend* und wegen $f''(3) > 0$ *linksgekrümmt*.

(b)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
2	1	0	0	-1

Die Kurve hat im Punkt $(2, 1)$ eine horizontale Tangente, und ihre Krümmung ändert wegen $f''(2) = 0$ und $f'''(2) < 0$ von einer Links- in einer Rechtskurve. Somit handelt es sich um einen *Terrassenpunkt*.

(c)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
-5	3	0	-2	$\frac{1}{2}$

Die Kurve hat im Punkt $(-5, 3)$ wegen $f'(-5) = 0$ eine horizontale Tangente und ist wegen $f''(-5) < 0$ rechtsgekrümmt. Somit handelt es sich um einen *Hochpunkt*.

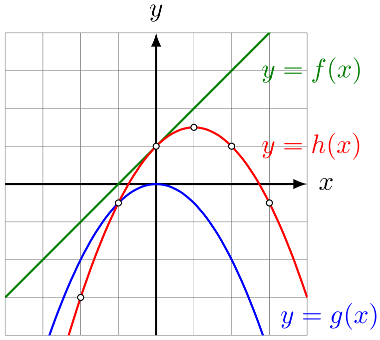
(d)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
1	1	2	0	1

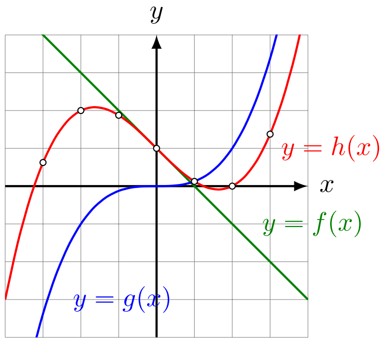
Die Kurve hat im Punkt $(1, 1)$ eine steigende Tangente und ändert wegen $f''(1) = 0$ und $f'''(1) > 0$ von einer Rechts- in eine Linkskurve. Somit handelt es sich um einen *Wendepunkt*.

Aufgabe 4

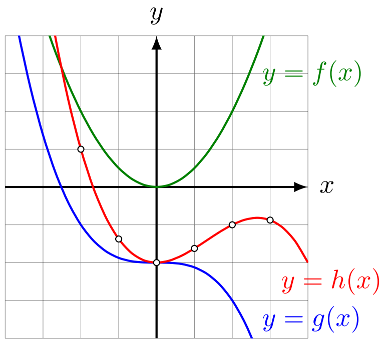
(a)



(b)



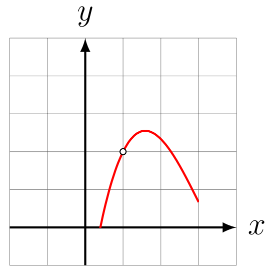
(c)



Aufgabe 5

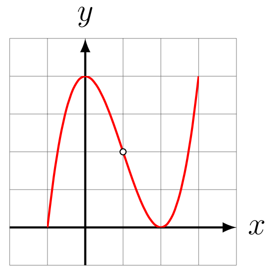
(a)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
1	2	2	-2	$\frac{1}{3}$



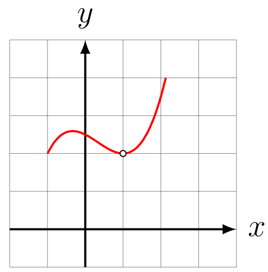
(b)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
1	2	-3	0	1



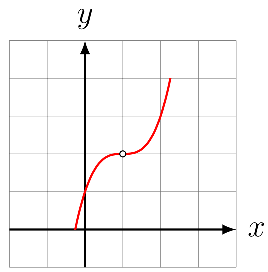
(c)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
1	2	0	1	$\frac{1}{2}$



(d)

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	$\frac{f'''(x_0)}{3!}$
1	2	0	0	1



Aufgabe 6

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 7x - 2$

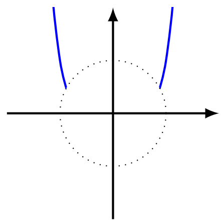
x_0	a_4	-6	7	7	-2
3	1	-3	-2	1	1
3	1	0	-2	-5	
3	1	3	7		
3	1	6			

$\Rightarrow f(3) = 1,\ f'(3) = -5,\ \frac{f''(3)}{2} = 7,\ \frac{f'''(3)}{6} = 6$

Aufgabe 7

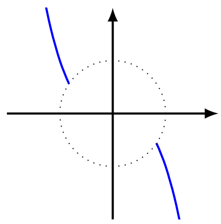
(a) $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 3x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(3x^6\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(3x^6\right) = +\infty$$



(b) $f(x) = -4x^3 - 9x^2 - x + 5$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-4x^3\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-4x^3\right) = +\infty$$



Aufgabe 8

(a) $1.67x^2 + 0.283x + 0.47 = 0$

Keine reellen Lösungen

$x_1 = -0.0847 + 0.5237\,\mathrm{i}$ und $x_2 = -0.0847 - 0.5237\,\mathrm{i}$ sind komplexe Lösungen.

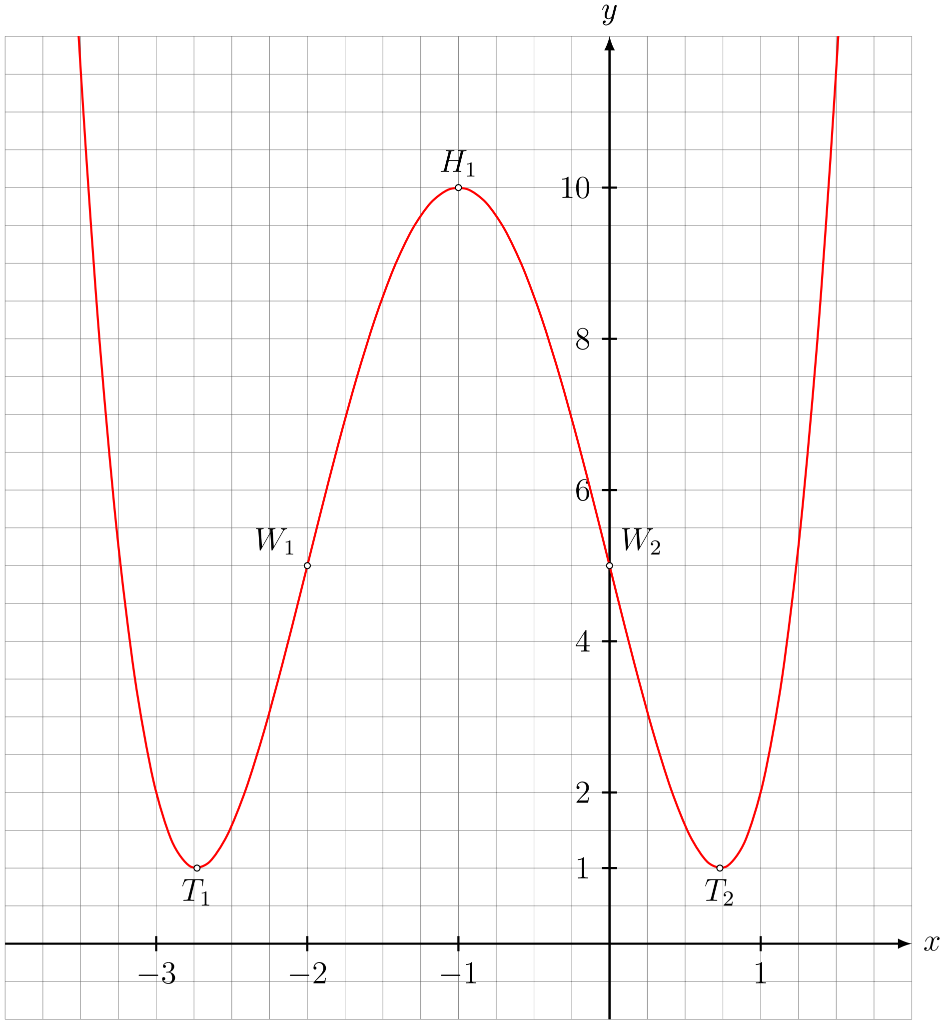
(b) $3.6x^3 + 4.19x^2 + 8.33x + 4.01 = 0$

Reelle Lösung: $x_1 = -0.5638$

$x_2 = -0.3 + 1.3732\,\mathrm{i}$ und $x_3 = -0.3 - 1.3732\,\mathrm{i}$ sind komplexe Lösungen.

Aufgabe 9

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2}$	$\frac{f'''(x_0)}{6}$	
-2.73	1	0	12	-6.9	T_1
-2	5	8	0	-4	W_1
-1	9	0	-6	0	H_1
0	5	-8	0	4	W_2
0.73	1	0	12	6.9	T_2



Aufgabe 10

$f\colon y = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$

asymptotisches Verhalten:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad$ und $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \infty$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = -7$

Nullstelle: $x \approx 4.28$ (poly-solv)

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ f''(x) &= 6x - 12 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

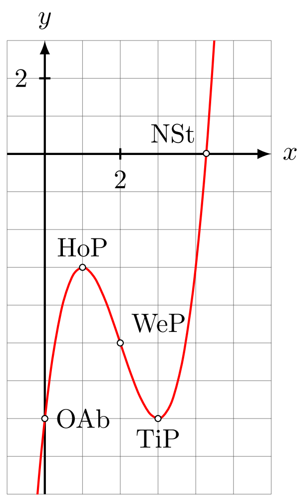
Extrempunkte:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3(x^2 - 4x + 3) &= 0 \\ 3(x-1)(x-3) &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad \text{(Kandidat)} \\ x_2 &= 3 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$f'(1) = 0$ und $f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(1, -3)$

$f'(3) = 0$ und $f''(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(3, -7)$

Wendepunkte:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 12 &= 0 \\ x &= 2 \quad \text{(Kandidat)} \end{aligned}$$

$f''(2) = 0$ und $f'''(2) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(2, -5)$



Aufgabe 11

$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 = x^3\left(\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{4}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \textit{Ableitungen:}\quad f'(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4) \\ f''(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 24x + 8) \\ f'''(x) &= 12x^2 - 24x + 8 \end{aligned}$$

asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^5 = \infty$$

Nullstelle(n):

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}x^5 - x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 &= 0 \\ x^3\left(\tfrac{1}{5}x^2 - x + \tfrac{4}{3}\right) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{(Die anderen Lösungen sind komplex.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Extrempunkte:}\quad f'(x) &= 0 \\ x^2(x^2 - 4x + 4) &= 0 \\ x^2(x-2)(x-2) &= 0 \quad \text{(oder mit TR)} \\ x_1 &= 0 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TeP}_1(0,0)$

$f'(2) = 0$ und $f''(2) = 0$ und $f'''(0) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TeP}_2(2, \frac{2}{15})$

Wegen $f''(0) = f''(2) = 0$ mussten wir $f'''(0)$ und $f'''(2)$ herbeiziehen.

$$\begin{aligned} \textit{Wendepunkte:}\quad f''(x) &= 0 \\ 4x(x^2 - 24x + 8) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(Kandidaten)} \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Die Stellen $x = 0$ und $x = 2$ wurden bereits oben analysiert.

$f''(1) = 0$ und $f'''(1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(2, \frac{8}{15})$