

Differenzialrechnung

Theorie (II)

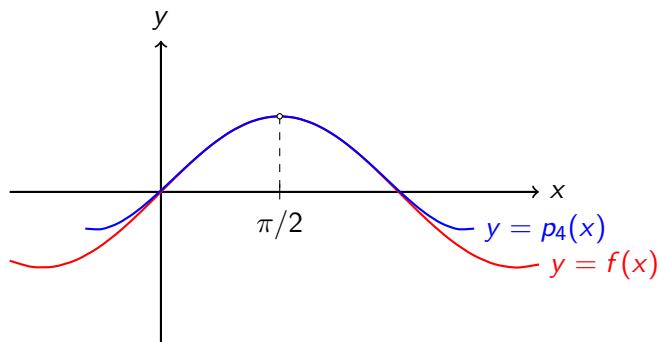
Gegeben: Eine Funktion $y = f(x)$, die an einer Stelle $x_0 \in D_f$ beliebig oft differenzierbar ist.

Gesucht: Die Koeffizienten einer Polynomfunktion

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

welche die Funktion f in einer Umgebung von x_0 möglichst gut approximiert (annähert).

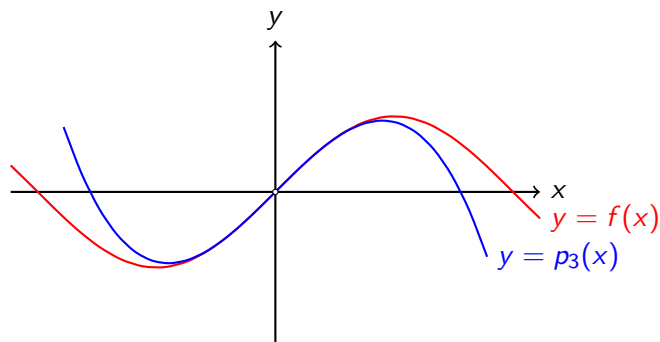
Beispiel 11.1



$$f(x) = \sin x; \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

Beispiel 11.2



$$f(x) = \sin x; x_0 = 0$$

$$p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_0 =$$

$$f'(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_0 =$$

$$f'(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) =$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_0 =$$

$$f'(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_0 =$$

$$f'(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 =$$

$$f'(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 =$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 =$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

$$f'''(x_0) = \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

$$f'''(x_0) = 6a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 =$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + 60a_5(x - x_0)^2 + \dots$$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$$f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

$$f'''(x_0) = 6a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{6}f'''(x_0)$$

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$:
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$:
- ▶ $f^{(2)}(x)$:
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$:
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$:
- ▶ $f^{(n)}(x)$:
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$:
- ▶ $f^{(2)}(x)$:
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$:
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$:
- ▶ $f^{(n)}(x)$:
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$:
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$:
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$:
- ▶ $f^{(n)}(x)$:
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$:
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$:
- ▶ $f^{(n)}(x)$:
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_n(x - x_0)^2$
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$:
- ▶ $f^{(n)}(x)$:
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_n(x - x_0)^2$
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_n(x - x_0)$
- ▶ $f^{(n)}(x)$:
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_n(x - x_0)^2$
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_n(x - x_0)$
- ▶ $f^{(n)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$:

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_n(x - x_0)^2$
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_n(x - x_0)$
- ▶ $f^{(n)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$: 0

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- ▶ $f^{(0)}(x) = f(x)$: $a_n(x - x_0)^n$
- ▶ $f^{(1)}(x) = f'(x)$: $n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$
- ▶ $f^{(2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$
- ▶ ...
- ▶ $f^{(n-2)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_n(x - x_0)^2$
- ▶ $f^{(n-1)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_n(x - x_0)$
- ▶ $f^{(n)}(x)$: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$
- ▶ $f^{(n+1)}(x)$: 0
- ▶ ...

Setzt man in $f^{(n)}(x)$ für x die Stelle x_0 ein, so erhält man $f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$, da alle übrigen Monome verschwinden. So gewinnt man den n -ten Koeffizienten der Polynomfunktion:

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

Das Taylor-Polynom in der Summenschreibweise

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Das erste Glied der Summe lässt sich in die Form der übrigen Summanden bringen:

Das Taylor-Polynom in der Summenschreibweise

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Das erste Glied der Summe lässt sich in die Form der übrigen Summanden bringen:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Somit können wir die Taylor-Reihe kompakter darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

... natürlich nur dann, wenn der Grenzwert rechts existiert.

Der Satz von Taylor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$:

Der Satz von Taylor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

Der Satz von Taylor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{mit } x < \xi < x_0$$

Restglied genannt wird und den „Abbruchfehler“ darstellt.

Beispiel 11.3

Approximiere $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

► $a_0 =$

► $a_1 =$

► $a_2 =$

► $a_3 =$

$f(x) =$

Beispiel 11.3

Approximiere $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

► $a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

► $a_1 =$

► $a_2 =$

► $a_3 =$

$f(x) =$

Beispiel 11.3

Approximiere $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

$$\blacktriangleright a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\blacktriangleright a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\blacktriangleright a_2 =$$

$$\blacktriangleright a_3 =$$

$$f(x) =$$

Beispiel 11.3

Approximiere $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

$$\blacktriangleright a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\blacktriangleright a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\blacktriangleright a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright a_3 =$$

$$f(x) =$$

Beispiel 11.3

Approximiere $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

$$\blacktriangleright a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\blacktriangleright a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\blacktriangleright a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$f(x) =$$

Beispiel 11.3

Approximiere $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

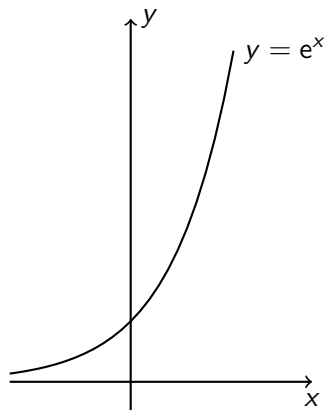
$$\blacktriangleright a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

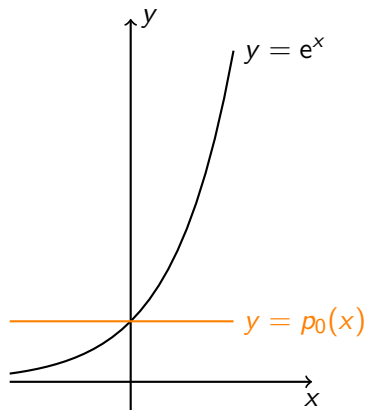
$$\blacktriangleright a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

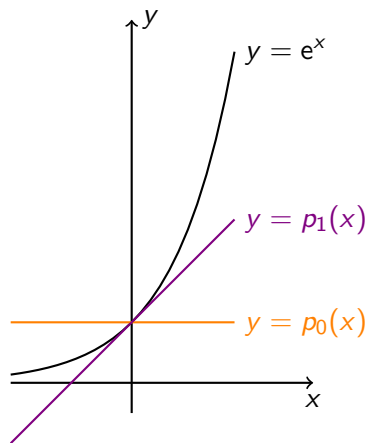
$$\blacktriangleright a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$$

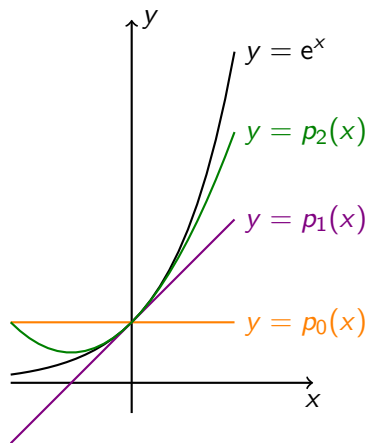
$$\blacktriangleright a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}$$

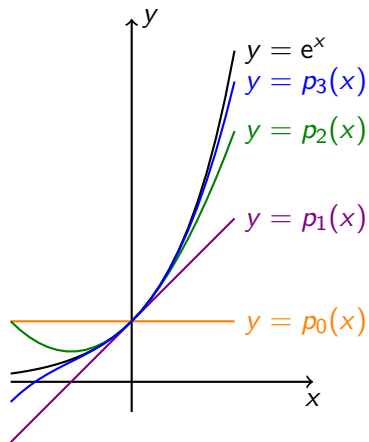
$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$









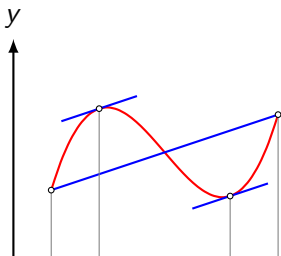


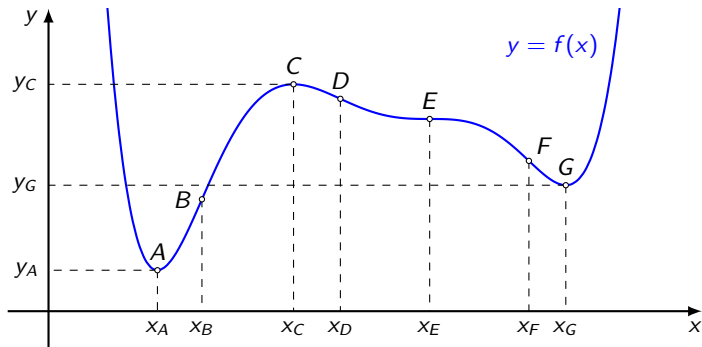
Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Ist eine Funktion f stetig im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar im offenen Intervall (a, b) , dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass gilt:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Die Steigung der Sekante über dem ganzen Intervall $[a, b]$ wird im Innern des Intervalls mindestens einmal als Tangentensteigung angenommen.





Extrempunkte: A (Tiefpunkt), C (Hochpunkt), G (Tiefpunkt)

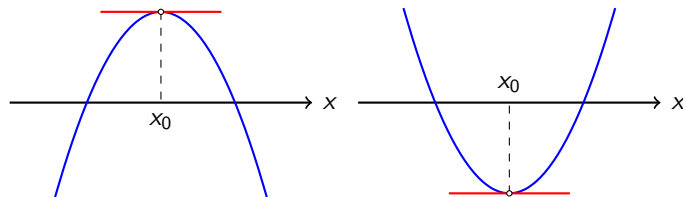
Wendepunkte: B, D, E (Terrassen- oder Sattelpunkt), F

Extrema: y_A (globales Minimum), y_C (lokales Maximum), x_G (lokales Minimum)

Extremstellen: x_A , x_C , x_G

Wendestellen: x_B , x_D , x_E , x_F

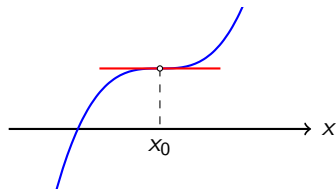
Ein notwendiges Kriterium für Extremstellen



x_0 ist eine Extremstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Der Spielverderber

$f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ ist Extremstelle



x_0 ist Terrassenstelle (Synonym: Sattelstelle)

Hinreichende Kriterien für Extremstellen

Gilt $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 entweder ...

- ▶ eine Hochstelle,
- ▶ eine Tiefstelle oder
- ▶ eine Terrassenstelle.

Wie findet man heraus, was vorliegt?

Betrachte die Taylorreihe von f :

Betrachte die Taylorreihe von f :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Parabel 2. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{vernachlässigbar}} + \dots$$

Betrachte die Taylorreihe von f :

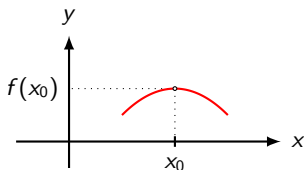
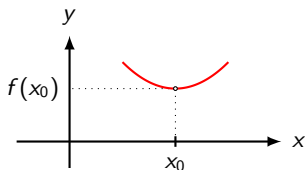
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Parabel 2. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{vernachlässigbar}} + \dots$$

ist $x \approx x_0$, so ist $(x - x_0)^3$ gegenüber $(x - x_0)^2$ vernachlässigbar.

Betrachte die Taylorreihe von f :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Parabel 2. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{vernachlässigbar}} + \dots$$

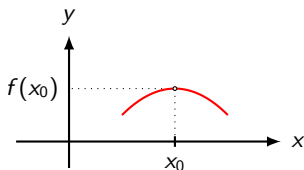
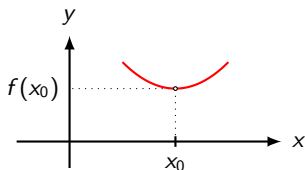
ist $x \approx x_0$, so ist $(x - x_0)^3$ gegenüber $(x - x_0)^2$ vernachlässigbar.



Betrachte die Taylorreihe von f :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Parabel 2. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{vernachlässigbar}} + \dots$$

ist $x \approx x_0$, so ist $(x - x_0)^3$ gegenüber $(x - x_0)^2$ vernachlässigbar.



$f''(x_0) > 0$: Parabel nach oben offen; x_0 ist Minimalstelle

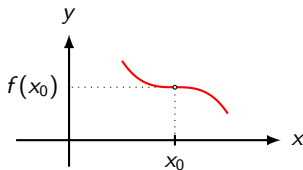
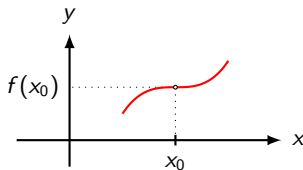
$f''(x_0) < 0$: Parabel nach unten offen; x_0 ist Maximalstelle

Gilt auch $f''(x_0) = 0$ verschwindet der dritte Summand und der vierte wird wichtig.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_0 + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{Parabel 3. Ordnung (*)}} + \dots$$

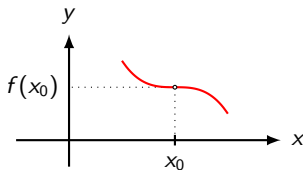
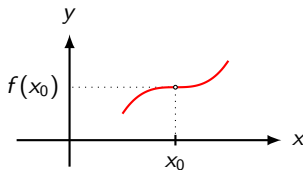
Gilt auch $f''(x_0) = 0$ verschwindet der dritte Summand und der vierte wird wichtig.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_0 + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots}_{\text{Parabel 3. Ordnung (*)}}$$



Gilt auch $f''(x_0) = 0$ verschwindet der dritte Summand und der vierte wird wichtig.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_0 + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots}_{\text{Parabel 3. Ordnung (*)}}$$



$f'''(x_0) > 0$: (*) ändert Krümmung $(-/+)$; x_0 ist Terrassenstelle

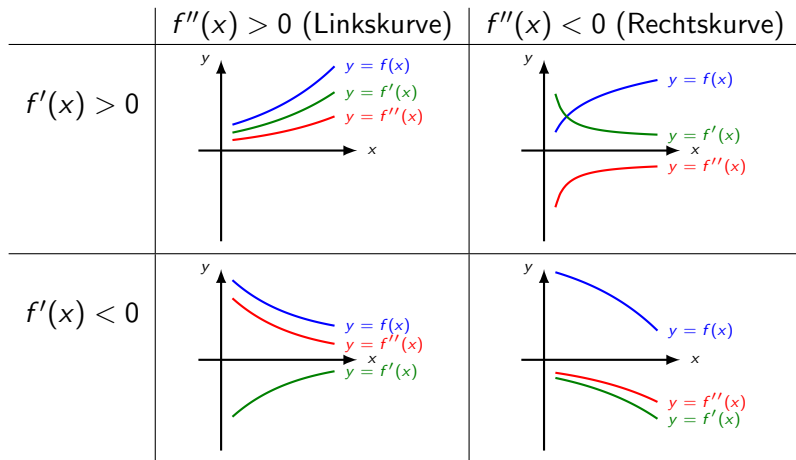
$f'''(x_0) < 0$: (*) ändert Krümmung $(+/-)$; x_0 ist Terrassenstelle

Gilt auch $f'''(x_0) = 0$ verschwindet der vierte Summand und der fünfte wird wichtig. In diesem Fall haben wir wieder dieselbe Situation wie bei der Parabel 2. Ordnung.

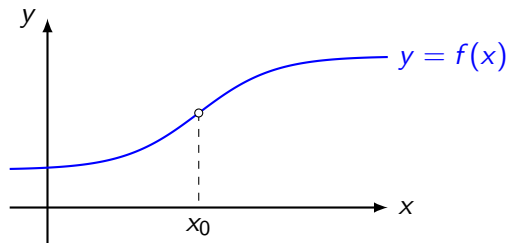
Bemerkung

Eine ganzrationale Funktion von Grad n hat nach einmaligem Ableiten den Grad $n - 1$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine solche Funktion höchstens $n - 1$ Nullstellen und somit auch höchstens $n - 1$ Extremstellen.

Überblick



Wechselt der Graph von f an einer Stelle x_0 von einer Links- in eine Rechtskurve oder von einer Rechts- in eine Linkskurve, so wird x_0 **Wendestelle** und $P(x_0, y_0)$ **Wendepunkt** genannt.



Notwendige Bedingung für Wendestellen

$$x_0 \text{ Wendestelle} \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

Da die Wendestellen die Extremstellen der 1. Ableitung sind, können wir die Wendestellen analog zu den Extremstellen berechnen, indem wir in der Theorie der Extremstellen f' durch f'' , f'' durch f''' usw. ersetzen.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen

f sei eine auf dem offenen Intervall I n -mal differenzierbare Funktion und für $x_0 \in I$ gelte

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Falls n ungerade ist, so ist x_0 eine Wendestelle und es gilt:

- $f^{(n)}(x_0) < 0$: Graph wechselt von Links- zur Rechtskrümmung

Hinreichende Bedingung für Wendestellen

f sei eine auf dem offenen Intervall I n -mal differenzierbare Funktion und für $x_0 \in I$ gelte

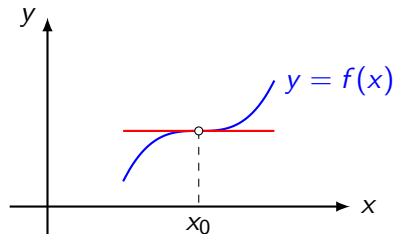
$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Falls n ungerade ist, so ist x_0 eine Wendestelle und es gilt:

- ▶ $f^{(n)}(x_0) < 0$: Graph wechselt von Links- zur Rechtskrümmung
- ▶ $f^{(n)}(x_0) > 0$: Graph wechselt von Rechts- zur Linkskrümmung

Terrassenpunkte

Eine **Wendetangente** ist eine Tangente in einem Wendepunkt. Ein **Terrassenpunkt** ist ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.



Bemerkung

Eine ganzrationale Funktion von Grad n hat nach zweimaligem Ableiten den Grad $n - 2$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine solche Funktion höchstens $n - 2$ Nullstellen und somit auch höchstens $n - 2$ Wendestellen.

Beispiel 13.1

Untersuche die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(a) Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

(b) Symmetrie

Vermutung: f ist gerade (symmetrisch zur y -Achse)

(b) Symmetrie

Vermutung: f ist gerade (symmetrisch zur y -Achse)

Beweis: $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ [nur gerade Exponenten]

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$$

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4) = +\infty$$

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4) = +\infty \quad \text{oder via Symmetrie}$$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$$x^2(x^2 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$$x^2(x^2 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$$

$$y_0 = f(0) = 0$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'''(x) = 24x$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(0, 0)$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(0, 0)$$

$$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \text{TiP}_1(1, -1)$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(0, 0)$$

$$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \text{TiP}_1(1, -1)$$

$\text{TiP}_2(-1, -1)$ [Symmetrie]

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Kandidaten: } x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Kandidaten: } x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'''(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0 \Rightarrow \text{WeP}_1(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}) \text{ (RKLK)}$$

(g) Wendepunkte

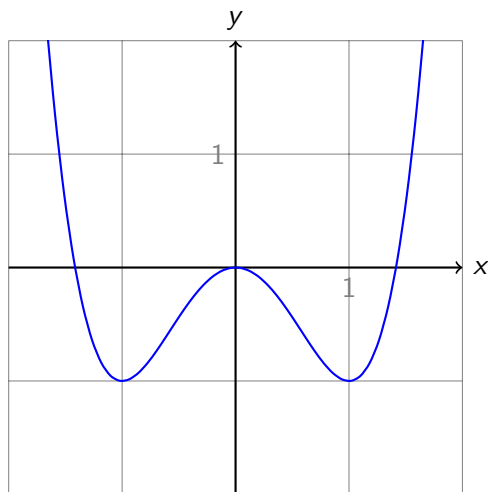
$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Kandidaten: } x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'''(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0 \Rightarrow \text{WeP}_1(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}) \text{ (RKLK)}$$

$$\text{Symmetrie: WeP}_2(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}) \text{ (LKRK)}$$

(h) Graph



Beispiel 13.2

Untersuche die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 3x^2 - x^3$.

(a) Definitionsbereich

(a) Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

(b) Symmetrie

(b) Symmetrie

G_f ist weder symmetrisch zur y -Achse noch symmetrisch zum Ursprung, da weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$

(c) Asymptotisches Verhalten

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3) = -\infty$$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 0$$

(e) Ableitungen

(e) Ableitungen

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

$$f''(x) = 6 - 6x$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

$$f''(x) = 6 - 6x$$

$$f'''(x) = -6$$

(f) Extrempunkte

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(0, 0)$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(0, 0)$$

$$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(2, 4)$$

(g) Wendepunkt

(g) Wendepunkt

$$f''(x) = 6 - 6x = 0$$

(g) Wendepunkt

$$f''(x) = 6 - 6x = 0$$

$$\text{Kandidat: } x = 1$$

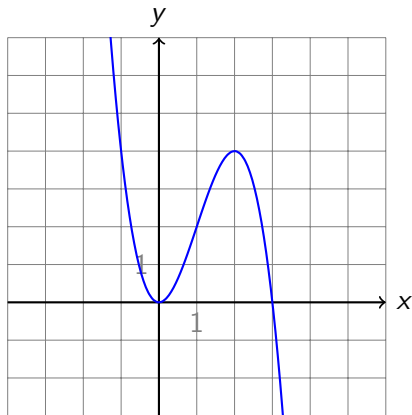
(g) Wendepunkt

$$f''(x) = 6 - 6x = 0$$

Kandidat: $x = 1$

$$f'''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{WeP}(1, 2) \text{ (LKRK)}$$

(h) Graph



Beispiel 13.3

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{15}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 1$.

(a) Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

(b) Symmetrie

weder gerade noch ungerade

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{8}x^5 = -\infty$$

(c) Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{8}x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{8}x^5 = +\infty$$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$$f(x) = 0 \stackrel{\text{TR}}{\Rightarrow} x \approx -0.64$$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$$f(x) = 0 \stackrel{\text{TR}}{\Rightarrow} x \approx -0.64$$

$$f(0) = 1$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2$$

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x$$

(e) Ableitungen

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2$$

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x$$

$$f'''(x) = \frac{45}{2}x^2 - 45x + 15$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x - 2)^2 = 0$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x - 2)^2 = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x - 2)^2 = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$f''(0) = 0 \text{ (weiter testen)}$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x - 2)^2 = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$f''(0) = 0 \text{ (weiter testen)}$$

$$f'''(0) = 15 > 0 \text{ (} \rightarrow \text{ Wendepunkte)}$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x - 2)^2 = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$f''(0) = 0 \text{ (weiter testen)}$$

$$f'''(0) = 15 > 0 \text{ (} \rightarrow \text{ Wendepunkte)}$$

$$f''(2) = 0 \text{ (weiter testen)}$$

(f) Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x - 2)^2 = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$f''(0) = 0 \text{ (weiter testen)}$$

$$f'''(0) = 15 > 0 \text{ (} \rightarrow \text{ Wendepunkte)}$$

$$f''(2) = 0 \text{ (weiter testen)}$$

$$f'''(2) = 15 > 0 \text{ (} \rightarrow \text{ Wendepunkte)}$$

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$$

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$$

$$\frac{15}{2}x(x^2 - 3x + 2) = \frac{15}{2}x(x - 1)(x - 2) = 0$$

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$$

$$\frac{15}{2}x(x^2 - 3x + 2) = \frac{15}{2}x(x - 1)(x - 2) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$$

$$\frac{15}{2}x(x^2 - 3x + 2) = \frac{15}{2}x(x - 1)(x - 2) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

TeP(0, 1) (siehe oben, RKLK)

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$$

$$\frac{15}{2}x(x^2 - 3x + 2) = \frac{15}{2}x(x - 1)(x - 2) = 0$$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

TeP(0, 1) (siehe oben, RKLK)

$f'''(1) = -7.5 < 0 \Rightarrow \text{WeP}(1, 2)$ (LKRK)

(g) Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$$

$$\frac{15}{2}x(x^2 - 3x + 2) = \frac{15}{2}x(x - 1)(x - 2) = 0$$

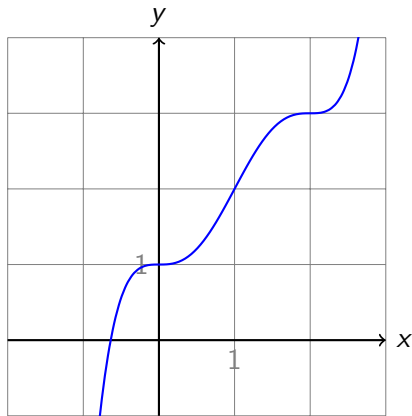
Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

TeP(0, 1) (siehe oben, RKLK)

$$f'''(1) = -7.5 < 0 \Rightarrow \text{WeP}(1, 2) \text{ (LKRK)}$$

TeP(2, 3) (siehe oben, RKLK)

(h) Graph



Beispiel 14.1

f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 und besitzt ...

- ▶ bei $x = -2$ eine Nullstelle,
- ▶ bei $x = 1$ eine Extremstelle,
- ▶ im Punkt $P(0, -8)$ eine Wendetangente mit der Steigung 2.

Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Beispiel 14.2

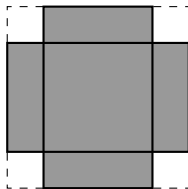
Welches zur y -Achse symmetrische Polynom 4. Grades geht durch $A(0, 2)$ und hat in $B(1, 0)$ ein Minimum?

Beispiel 14.3

Ein Polynom 3. Grades hat dieselben Nullstellen wie $g(x) = 2x - 12x^3$. Beide Graphen stehen im Ursprung senkrecht aufeinander. Bestimme die Funktionsgleichung des unbekannten Polynoms.

Beispiel 15.1 (Offene Schachtel)

Von einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge $l = 10$ cm werden an allen Ecken Quadrate mit gleicher Seitenlänge ausgeschnitten.



Wie gross ist die Seitenlänge dieser Quadrate zu wählen, damit der Rest eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen ergibt?

Wie gross ist dieses Volumen?

Zielfunktion

Nebenbedingung(en)

► $l = b = 10 - 2x$

Nebenbedingung(en)

▶ $l = b = 10 - 2x$

▶ $h = x$

Nebenbedingung(en)

▶ $l = b = 10 - 2x$

▶ $h = x$

▶ $0 \text{ cm} < x < 5 \text{ cm}$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extremum bestimmen

Extremum bestimmen

Extremum bestimmen

Extremum bestimmen

Extremum bestimmen

Extremum bestimmen

Extremum bestimmen

Lösung

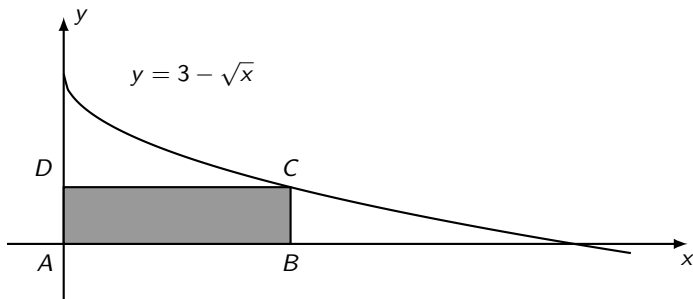
Lösung

Lösung

Lösung

Beispiel 15.2

Ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind, hat eine Ecke in $A(0,0)$. Die Ecke $C(x,y)$ liegt im I. Quadranten auf der Kurve $f(x) = 3 - \sqrt{x}$ und soll so bestimmt werden, dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird.



Zielfunktion

Nebenbedingung

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extremum bestimmen

► $A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$

Extremum bestimmen

$$\blacktriangleright A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\blacktriangleright A''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

Extremum bestimmen

$$\blacktriangleright A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\blacktriangleright A''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

Extremum bestimmen

$$\blacktriangleright A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\blacktriangleright A''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

Extremum bestimmen

$$\blacktriangleright A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\blacktriangleright A''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

Extremum bestimmen

$$\blacktriangleright A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\blacktriangleright A''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

Extremum bestimmen

$$\blacktriangleright A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

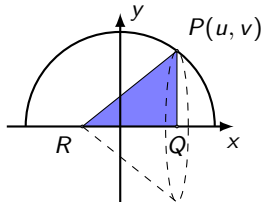
$$\blacktriangleright A''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

Lösung

Lösung

Beispiel 15.3

Auf dem Halbkreis mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ wird ein Punkt $P(u, v)$ gewählt. Lässt man das rechtwinklige Dreieck $P(u, v)$, $Q(u, 0)$, $R(-1, 0)$ um die x -Achse drehen, entsteht ein gerader Kreiskegel.



Bei welcher x -Koordinate u hat der Kreiskegel maximales Volumen und wie gross ist dieses?

Zielfunktion

Nebenbedingung

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

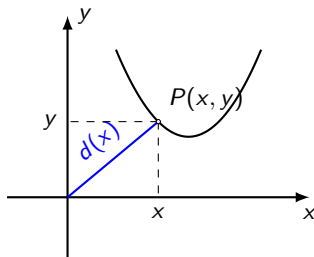
Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Lösung

Beispiel 15.4

Welcher Punkt $P(x, y)$ der Kurve $k: y = x^2 - 4x + 5$ hat die kürzeste Entfernung vom Ursprung?



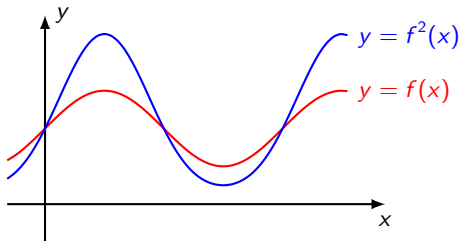
Zielfunktion

Nebenbedingung

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Bemerkung

Wenn man eine Funktion mit positiven Werten quadriert, bleiben lokale Extrema erhalten.



Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Lösung

Beispiel 15.5

Für die Oberfläche einer zylinderförmige Büchse mit einem Volumen von 1ℓ soll möglichst wenig Material verbraucht werden. Wie gross müssen Höhe h und Radius r gewählt werden?



Zielfunktion

Nebenbedingung

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

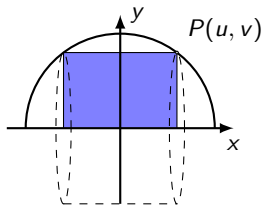
Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Lösung

Beispiel 15.6

Dem Halbkreis mit der Gleichung $y = \sqrt{12 - x^2}$ wird, wie in der Abbildung dargestellt, ein Rechteck einbeschrieben.



Dreht man dieses Rechteck um die x -Achse, so entsteht ein Zylinder. Wie gross kann das Volumen dieses Zylinders maximal werden?

Zielfunktion

Nebenbedingung

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Extrema bestimmen

Lösung

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$f_{-1}(x) =$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$f_{-1}(x) =$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f_{-1}(x) =$$

$$f_0(x) =$$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f_{-1}(x) =$$

$$f_0(x) =$$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f_{-1}(x) =$$

$$f_0(x) =$$

$$f_1(x) =$$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f_{-1}(x) =$$

$$f_0(x) =$$

$$f_1(x) =$$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f_{-1}(x) =$$

$$f_0(x) =$$

$$f_1(x) =$$

$$f_2(x) =$$

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t$ ($t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f_{-1}(x) =$$

$$f_0(x) =$$

$$f_1(x) =$$

$$f_2(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$f'_t(x) =$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$f'_t(x) =$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

$$f'_0(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

$$f'_0(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

$$f'_0(x) =$$

$$f'_1(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

$$f'_0(x) =$$

$$f'_1(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

$$f'_0(x) =$$

$$f'_1(x) =$$

$$f'_2(x) =$$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$$f'_t(x) =$$

$$f'_{-1}(x) =$$

$$f'_0(x) =$$

$$f'_1(x) =$$

$$f'_2(x) =$$

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f'_t(2) = 1$?

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f'_t(2) = 1$?

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f'_t(2) = 1$?

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f'_t(2) = 1$?

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f'_t(2) = 1$?

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f'_t(2) = 1$?

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t .

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t .

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t .

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t .

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t .

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t .

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

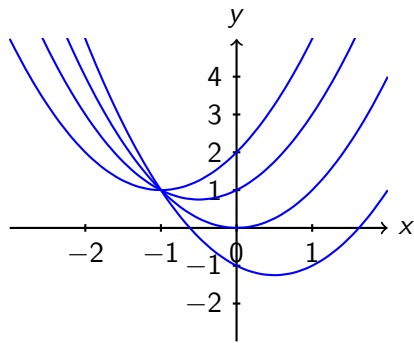
Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

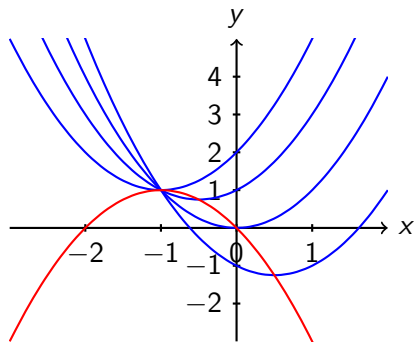
Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t ?





Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Begriffe

Eine *gebrochenrationale Funktion* ist ein Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{a_m x^n + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei

- ▶ $p(x)$ ein *Zählerpolynom* vom Grad m ist,
- ▶ $q(x)$ ein *Nennerpolynom* vom Grad n ist.

Weitere Bezeichnungen und Sonderfälle:

$n = 0$:

Der Nenner $q_0(x) = b_0$ ist konstant und $f(x)$ ist eine *ganzrationale Funktion*.

$m \geq n$:

f ist eine *unecht gebrochenrationale Funktion*.

$m < n$:

f ist eine *echt gebrochenrationale Funktion*.

Ein Verfahren, um eine unecht gebrochenrationale Funktion als Summe aus einer ganzrationalen- und einer echt gebrochenrationalen Funktion darzustellen. (vgl. $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$)

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x + 1) : (2x - 1) = x + 1 + \frac{2}{2x - 1} \\ \underline{-(2x^2 - x)} \\ 2x + 1 \\ \underline{-(2x - 1)} \\ 2 \end{array}$$

Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x: q(x) = 0\}$$

Menge aller reellen Zahlen, die *nicht* Nullstellen des Nennerpolynoms sind.

Beispiel 17.1

$$f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 7x + 12}$$

Beispiel 17.1

$$f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 7x + 12}$$

Nullstellen

Eine *Nullstelle* von f ist eine Nullstelle von $p(x)$, die nicht auch Nullstelle von $q(x)$ ist.

Beispiel 17.2

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x - 9}$$

Beispiel 17.2

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x - 9}$$

Hebbare Definitionslücken

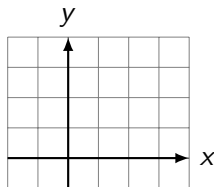
Eine Definitionslücke, die sich als Faktor aus dem Nenner wegekürzen lässt, wird *hebbbar* genannt.

Beispiel 17.3

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$

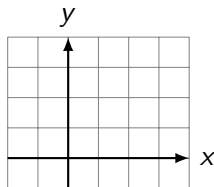
Beispiel 17.3

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$



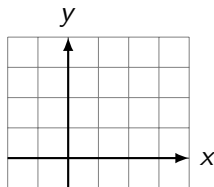
Beispiel 17.3

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$



Beispiel 17.3

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$



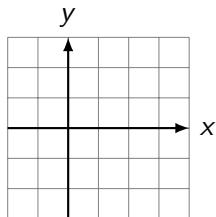
Polstelle

Eine Definitionslücke, die sich als Faktor nicht aus dem Nenner wegkürzen lässt, wird *Polstelle* genannt.

Ist der Grad des gekürzten Linearfaktors ungerade, so ist es eine Polstelle *mit Vorzeichenwechsel* (*mVzw*), sonst eine Polstelle *ohne Vorzeichenwechsel* (*oVzw*).

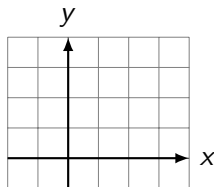
Beispiel 17.4

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$



Beispiel 17.5

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$



Pol ohne Vorzeichenwechsel

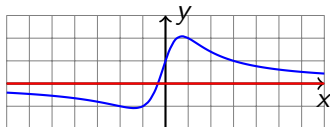
Asymptotisches Verhalten

Welchen Grenzwert haben $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?

Beispiel 17.6

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

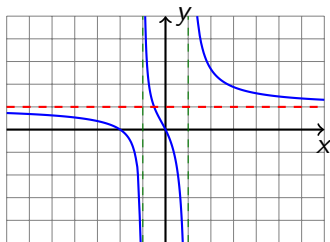


(horizontale) Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)

Beispiel 17.7

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2x + 1}{x^2 - 1} \quad (\text{Polynomdivision})$$

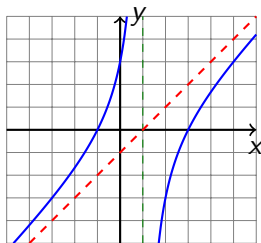
horizontale Asymptote: $y = 1$



Beispiel 17.8

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = x - 1 - \frac{4}{x - 1} \quad (\text{Polynomdivision})$$

schiefe Asymptote: $a(x) = x - 1$



Beispiel 17.9

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$$

► *Definitionsbereich:*

► *Definitionsbereich:*

► *Symmetrie:*

► *Definitionsbereich:*

► *Symmetrie:*

- ▶ *Definitionsbereich:*
- ▶ *Symmetrie:*
- ▶ *Nullstelle(n) und Ordinatenabschnitt:*

- ▶ *Definitionsbereich:*
- ▶ *Symmetrie:*
- ▶ *Nullstelle(n) und Ordinatenabschnitt:*

- ▶ *Definitionsbereich:*
- ▶ *Symmetrie:*
- ▶ *Nullstelle(n) und Ordinatenabschnitt:*

- ▶ *Definitionsbereich:*
- ▶ *Symmetrie:*
- ▶ *Nullstelle(n) und Ordinatenabschnitt:*
- ▶ *Verhalten an den Definitionslücken:*

- ▶ *Definitionsbereich:*
- ▶ *Symmetrie:*
- ▶ *Nullstelle(n) und Ordinatenabschnitt:*
- ▶ *Verhalten an den Definitionslücken:*
- ▶ *Asymptotisches Verhalten*

- ▶ *Definitionsbereich:*
- ▶ *Symmetrie:*
- ▶ *Nullstelle(n) und Ordinatenabschnitt:*
- ▶ *Verhalten an den Definitionslücken:*
- ▶ *Asymptotisches Verhalten*

► *Ableitungen:*

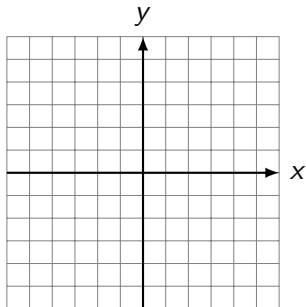
► *Ableitungen:*

► *Extrempunkte:*

► *Extrempunkte:*

► *Wendepunkte:*

► *Graph:*



Beispiel 18.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

(a) *Definitionsbereich:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

(c) *Asymptotisches Verhalten:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

(c) *Asymptotisches Verhalten:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

(c) *Asymptotisches Verhalten:*

(d) *Ordinatenabschnitt und Nullstellen:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

(c) *Asymptotisches Verhalten:*

(d) *Ordinatenabschnitt und Nullstellen:*

(e) *Ableitungen:*

(e) *Ableitungen:*

(f) *Extrempunkte:*

(e) *Ableitungen:*

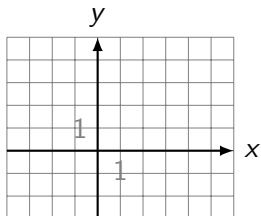
(f) *Extrempunkte:*

(g) *Wendepunkte:*

(g) *Wendepunkte:*

(g) *Wendepunkte:*

(h) *Graph:*



Beispiel 18.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{5 \ln(x)}{x}$

(a) *Definitionsbereich:*

(a) *Definitionsbereich:*

(b) *Symmetrie:*

- (a) *Definitionsbereich:*
- (b) *Symmetrie:*
- (c) *Asymptoten:*
- (d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt:

(e) *Ableitungen:*

(e) *Ableitungen:*

(f) Extrempunkte:

(f) Extrempunkte:

(f) Extrempunkte:

(g) Wendepunkte:

(g) Wendepunkte:

(h) *Graph:*

