Differenzialrechung (Kapitel 14–16) Lösungen+ Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad (1)$

$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad (2)$

$f(3) = 9 \quad \Rightarrow \quad 27a + 9b + 3c + d = 9 \quad (3)$

$f'(3) = \frac{9}{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad 27a + 6b + 2c = 3 \quad (4)$

(1)–(4) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

Aufgabe 2

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \qquad g(x) = 4x - 5$
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \qquad g'(x) = 4$

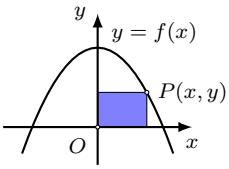
$f(-1) = 9 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 9 \quad (1)$

$f(2) = g(2) = 3 \quad \Rightarrow \quad 16a + 4b + c = 3 \quad (2)$

$f'(2) = g'(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 32a + 4b = 4 \quad (3)$

(1)–(3) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = x^4 - 7x^2 + 15$

Aufgabe 3



Zielfunktion:

$A = x \cdot y$

Nebenbedingung(en):

$y = 3 - x^2,\ 0 < x < \sqrt{3}$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3$

Extremstellen:

$A'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_2 = -1$

$A''(x) = -6x \ \Rightarrow \ A''(1) = -6 < 0 \ \Rightarrow \ x = 1$ ist Maximalstelle

Antwort:

$y = f(x) = f(1) = 3 - 1^2 = 2 \ \Rightarrow \ P(1, 2)$ [nicht verlangt]

Aufgabe 4

Zielfunktion: $A = x \cdot y$

Nebenbedingung(en):

Strahlensatz: $y : (50 - x) = 80 : 50$

(Produkt der Innenglieder = Produkt der Aussenglieder)

$50y = 80(50 - x) \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{80(50 - x)}{50} = 80 - 1.6x$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = x \cdot (80 - 1.6x) = 80x - 1.6x^2$

Extremstellen:

$A'(x) = 80 - 3.2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$

Test: $A''(x) = -3.2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$ ist Maximalstelle

Antwort: $x = 25\,\text{cm}$ und $y = 80 - 1.6 \cdot 25 = 40\,\text{cm}$

Aufgabe 5

$f_t(x) = x^3 - tx^2 + t + 1$ für

(a) Für welches t geht der Graph von f_t durch $A(2, 18)$?

$$8 - 4t + t + 1 = 18$$
$$-5t = 9$$
$$t = -1.8$$

(b) Für welches t hat f an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt?

$f_t'(x) = 3x^2 - 2tx$

$f_t''(x) = 6x - 2t = 0$

$6 \cdot 3 - 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 9$

Setze $t = 0$ und $x = 3$ in $f_t(x)$ ein: $y = -44$

$W(3, -44)$

Aufgabe 6

Die Kurven zu zwei verschieden Parametern ($s \neq t$) gleichsetzen:

$$
\begin{aligned}
f_s(x) &= f_t(x) \quad (s \neq t) \\
x^3 - tx^2 + tx + 2t + 1 &= x^3 - sx^2 + sx + 2s + 1 \quad || - \text{linke Seite} \\
-tx^2 + tx + 2t + 2sx^2 - sx - 2s &= 0 \quad || \quad \text{konsequent } (t-s) \text{ ausklammern} \\
-x^2(t-s) + x(t-s) + 2(t-s) &= 0 \quad || \quad : (t-s) \\
-x^2 + x + 2 &= 0 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x+1)(x-2) &= 0 \\
x_1 = -1 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 0 \\
y_1 = 2 \quad &\Rightarrow \quad y_2 = 9
\end{aligned}
$$