Differenzialrechung (Kapitel 14–16)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung. Die Tangente im Kurvenpunkt $P(3, 9)$ geht ebenfalls durch den Ursprung. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Aufgabe 1

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Aufgabe 1

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad d = 0 \qquad (1)$$

$$f'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = 0 \qquad (2)$$

$$f(3) = 9 \qquad \Rightarrow \quad 27a + 9b + 3c + d = 9 \qquad (3)$$

$$f'(3) = \frac{9}{3} = 3 \qquad \Rightarrow \quad 27a + 6b + 2c = 3 \qquad (4)$$

$$(1)\text{–}(4) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$$

Aufgabe 2

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse, geht durch $P(-1,9)$ und berührt an der Stelle $x=2$ die Gerade $g: y=4x-5$. Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 2

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $\qquad$ $g(x) = 4x - 5$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ $\qquad$ $g'(x) = 4$

Aufgabe 2

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $\qquad$ $g(x) = 4x - 5$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ $\qquad$ $g'(x) = 4$

$f(-1) = 9 \qquad \Rightarrow \quad a + b + c = 9 \qquad (1)$

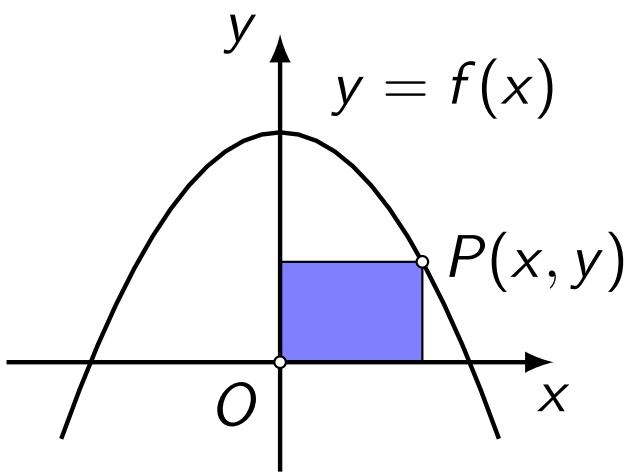
$f(2) = g(2) = 3 \qquad \Rightarrow \quad 16a + 4b + c = 3 \qquad (2)$

$f'(2) = g'(2) = 4 \qquad \Rightarrow \quad 32a + 4b = 4 \qquad (3)$

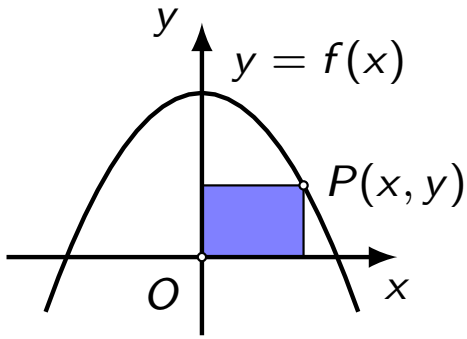
(1)–(3) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = x^4 - 7x^2 + 15$

Aufgabe 3

Eine Ecke P des abgebildeten achsenparallelen Rechtecks liegt auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 3 - x^2$ im 1. Quadranten. Die gegenüber liegende Ecke O befindet sich im Ursprung. Bestimme x, so dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird und weise die Maximaleigenschaft nach.



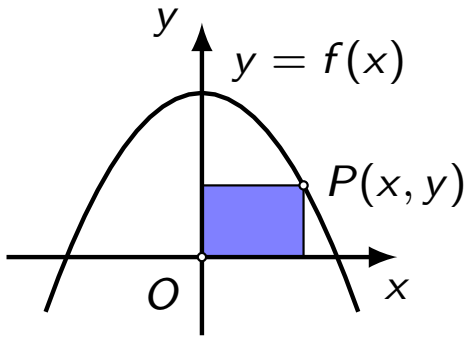
Aufgabe 3



Zielfunktion:

$A = x \cdot y$

Aufgabe 3



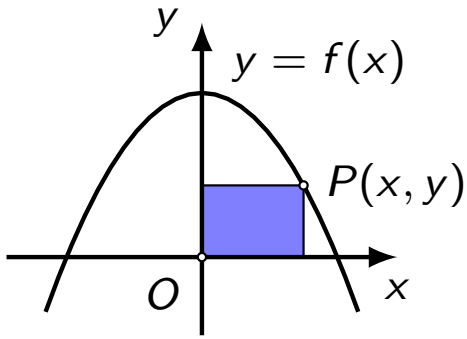
Zielfunktion:

$A = x \cdot y$

Nebenbedingung(en):

$y = 3 - x^2,\ 0 < x < \sqrt{3}$

Aufgabe 3



Zielfunktion:

$A = x \cdot y$

Nebenbedingung(en):

$y = 3 - x^2,\ 0 < x < \sqrt{3}$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3$

Extremstellen:

$$A'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$

$$A''(x) = -6x \;\Rightarrow\; A''(1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ ist Maximalstelle}$$

Extremstellen:

$$A'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$

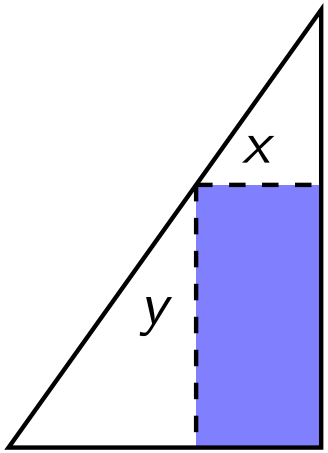
$$A''(x) = -6x \;\Rightarrow\; A''(1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ ist Maximalstelle}$$

Antwort:

$$y = f(x) = f(1) = 3 - 1^2 = 2 \;\Rightarrow\; P(1, 2) \text{ [nicht verlangt]}$$

Aufgabe 4

Ein Stück Holz hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 50 cm und 80 cm lang sind. Durch zwei zu den Katheten parallele Schnitte soll ein rechtwinkliges Stück ausgesägt werden. Wie lang sind die Schnittkanten x und y zu wählen, damit der Flächeninhalt des rechteckigen Stücks maximal wird?



Aufgabe 4

Zielfunktion: $A = x \cdot y$

Nebenbedingung(en):

Strahlensatz: $y : (50 - x) = 80 : 50$

(Produkt der Innenglieder = Produkt der Aussenglieder)

$$50y = 80(50 - x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{80(50 - x)}{50} = 80 - 1.6x$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$A(x) = x \cdot (80 - 1.6x) = 80x - 1.6x^2$$

Extremstellen:

$$A'(x) = 80 - 3.2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Test: $A''(x) = -3.2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$ ist Maximalstelle

Antwort: $x = 25\,\text{cm}$ und $y = 80 - 1.6 \cdot 25 = 40\,\text{cm}$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 - tx^2 + t + 1$ für $t > 0$.

(a) Für welches t geht der Graph von f_t durch den Punkt $A(2, 18)$?

(b) Für welches t hat f an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt? Berechne seine Koordinaten.

Aufgabe 5

$f_t(x) = x^3 - tx^2 + t + 1$ für

(a) Für welches t geht der Graph von f_t durch $A(2, 18)$?

$$8 - 4t + t + 1 = 18$$
$$-5t = 9$$
$$t = -1.8$$

(b) Für welches t hat f an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt?

$f_t'(x) = 3x^2 - 2tx$

$f_t''(x) = 6x - 2t = 0$

$6 \cdot 3 - 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 9$

Setze $t = 0$ und $x = 3$ in $f_t(x)$ ein: $y = -44$

$W(3, -44)$

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^3 - tx^2 + tx + 2t + 1 \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme alle Punkte, die auf jeweils allen Graphen der Kurvenschar liegen.

Aufgabe 6

Die Kurven zu zwei verschieden Parametern ($s \neq t$) gleichsetzen:

$$f_s(x) = f_t(x) \quad (s \neq t)$$

$$x^3 - tx^2 + tx + 2t + 1 = x^3 - sx^2 + sx + 2s + 1 \quad || - \text{linke S}$$

$$-tx^2 + tx + 2t + 2sx^2 - sx - 2s = 0 \quad || \quad \text{konsequent } (t - s) \text{ ausklamm}$$

$$-x^2(t - s) + x(t - s) + 2(t - s) = 0 \quad || \quad : (t - s)$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0$$

$$y_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 9$$