

Differenzialrechnung (Kapitel 10)

Prüfungsvorbereitung

Sofern nichts anderes steht, sind die exakten Lösungen der Gleichungen ohne Taschenrechner zu bestimmen.

Aufgabe 10.1

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = 7x - 5.$$

Aufgabe 10.1

$$f: y = 7x - 5.$$

Aufgabe 10.1

$$f: y = 7x - 5.$$

$$f(0) = -5$$

Aufgabe 10.1

$$f: y = 7x - 5.$$

$$f(0) = -5$$

$$7x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{7}$$

Aufgabe 10.2

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = x^2 + 9.$$

Aufgabe 10.2

$$f: y = x^2 + 9.$$

Aufgabe 10.2

$$f: y = x^2 + 9.$$

$$f(0) = 9$$

Aufgabe 10.2

$$f: y = x^2 + 9.$$

$$f(0) = 9$$

$$x^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine (reellen) Nullstellen}$$

Aufgabe 10.3

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = 3x^2 - 2x.$$

Aufgabe 10.3

$$f: y = 3x^2 - 2x.$$

Aufgabe 10.3

$$f: y = 3x^2 - 2x.$$

$$f(0) = 0$$

Aufgabe 10.3

$$f: y = 3x^2 - 2x.$$

$$f(0) = 0$$

$$0 = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 10.4

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = x^2 - 8.$$

Aufgabe 10.4

$$f: y = x^2 - 8.$$

Aufgabe 10.4

$$f: y = x^2 - 8.$$

$$f(0) = -8$$

Aufgabe 10.4

$$f: y = x^2 - 8.$$

$$f(0) = -8$$

$$x^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}$$

Aufgabe 10.5

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = x^2 - 2x - 15.$$

Aufgabe 10.5

$$f: y = x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5).$$

Aufgabe 10.5

$$f: y = x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5).$$

$$f(0) = -15$$

Aufgabe 10.5

$$f: y = x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5).$$

$$f(0) = -15$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3, x_2 = 5$$

Aufgabe 10.6

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = x^4 - 5x^2 + 6.$$

Aufgabe 10.6

$$f: y = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3) \text{ (biquadratische Gleichung)}$$

Aufgabe 10.6

$$f: y = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3) \text{ (biquadratische Gleichung)}$$

$$f(0) = 6$$

Aufgabe 10.6

$$f: y = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3) \text{ (biquadratische Gleichung)}$$

$$f(0) = 6$$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$$

Aufgabe 10.7

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = x^{11} - 4x^9.$$

Aufgabe 10.7

$$f: y = x^{11} - 4x^9 = x^9(x^2 - 4) = x^9(x - 2)(x + 2).$$

Aufgabe 10.7

$$f: y = x^{11} - 4x^9 = x^9(x^2 - 4) = x^9(x - 2)(x + 2).$$

$$f(0) = 0$$

Aufgabe 10.7

$$f: y = x^{11} - 4x^9 = x^9(x^2 - 4) = x^9(x - 2)(x + 2).$$

$$f(0) = 0$$

$$x^9(x - 2)(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$$

Aufgabe 10.8

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = (x + 1)(x - \sqrt{3})^2.$$

Aufgabe 10.8

$$f: y = (x + 1)(x - \sqrt{3})^2.$$

Aufgabe 10.8

$$f: y = (x + 1)(x - \sqrt{3})^2.$$

$$f(0) = 1 \cdot (-\sqrt{3})^2 = 3$$

Aufgabe 10.8

$$f: y = (x + 1)(x - \sqrt{3})^2.$$

$$f(0) = 1 \cdot (-\sqrt{3})^2 = 3$$

$$(x + 1)(x - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = x_3 = \sqrt{3}$$

Aufgabe 10.9

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = \frac{(x+5)(x-3)}{x(x-4)}.$$

Aufgabe 10.9

$$f: y = \frac{(x+5)(x-3)}{x(x-4)}$$

Aufgabe 10.9

$$f: y = \frac{(x+5)(x-3)}{x(x-4)}$$

$$f(0) = \frac{5 \cdot (-3)}{0 \cdot (-4)} = \frac{-15}{0} \text{ nicht definiert}$$

Aufgabe 10.9

$$f: y = \frac{(x+5)(x-3)}{x(x-4)}$$

$$f(0) = \frac{5 \cdot (-3)}{0 \cdot (-4)} = \frac{-15}{0} \text{ nicht definiert}$$

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x(x-4)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5, x_2 = 3$$

Aufgabe 10.10

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6}.$$

Aufgabe 10.10

$$f: y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$$

Aufgabe 10.10

$$f: y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$$

$$f(0) = \frac{12}{6} = 2$$

Aufgabe 10.10

$$f: y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$$

$$f(0) = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Aufgabe 10.11

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = \sqrt{x-3} - 2.$$

Aufgabe 10.11

$$f: y = \sqrt{x-3} - 2$$

Aufgabe 10.11

$$f: y = \sqrt{x-3} - 2$$

$$f(0) = \sqrt{-3} - 2 \text{ nicht definiert}$$

Aufgabe 10.11

$$f: y = \sqrt{x-3} - 2$$

$$f(0) = \sqrt{-3} - 2 \text{ nicht definiert}$$

$$\sqrt{x-3} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

Aufgabe 10.12

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = \sqrt{x+2} + 3.$$

Aufgabe 10.12

$$f: y = \sqrt{x+2} + 3.$$

Aufgabe 10.12

$$f: y = \sqrt{x+2} + 3.$$

$$f(0) = 3 + \sqrt{2}$$

Aufgabe 10.12

$$f: y = \sqrt{x+2} + 3.$$

$$f(0) = 3 + \sqrt{2}$$

$\sqrt{x+2} + 3 = 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen (da $\sqrt{x+2} = -3$ sein müsste)

Aufgabe 10.13

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = e^x - 2.$$

Aufgabe 10.13

$$f: y = e^x - 2$$

Aufgabe 10.13

$$f: y = e^x - 2$$

$$f(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

Aufgabe 10.13

$$f: y = e^x - 2$$

$$f(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \ln(2)$$

Aufgabe 10.14

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = (x - 5)e^x.$$

Aufgabe 10.14

$$f: y = (x - 5)e^x.$$

Aufgabe 10.14

$$f: y = (x - 5)e^x.$$

$$f(0) = (0 - 5) \cdot e^0 = -5 \cdot 1 = -5$$

Aufgabe 10.14

$$f: y = (x - 5)e^x.$$

$$f(0) = (0 - 5) \cdot e^0 = -5 \cdot 1 = -5$$

$$(x - 5)e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad (y = e^x \text{ hat keine Nullstellen})$$

Aufgabe 10.15

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion
 $f: y = \ln(x - 7)$.

Aufgabe 10.15

$$f: y = \ln(x - 7).$$

Aufgabe 10.15

$$f: y = \ln(x - 7).$$

$f(0) = \ln(-7)$ ist nicht definiert

Aufgabe 10.15

$$f: y = \ln(x - 7).$$

$f(0) = \ln(-7)$ ist nicht definiert

$$\ln(x - 7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

Aufgabe 10.16

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = \ln(x + 1) - 3.$$

Aufgabe 10.16

$$f: y = \ln(x + 1) - 3.$$

Aufgabe 10.16

$$f: y = \ln(x + 1) - 3.$$

$$f(0) = \ln(1) - 3 = 0 - 3 = -3$$

Aufgabe 10.16

$$f: y = \ln(x + 1) - 3.$$

$$f(0) = \ln(1) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$\ln(x + 1) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^3 - 1$$

Aufgabe 10.17

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion
 $f: y = \sin(2x + 1)$.

Aufgabe 10.17

$$f: y = \sin(2x + 1).$$

Aufgabe 10.17

$$f: y = \sin(2x + 1).$$

$$f(0) = \sin(1)$$

Aufgabe 10.17

$$f: y = \sin(2x + 1).$$

$$f(0) = \sin(1)$$

$$\sin(2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_k + 1 = k\pi \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{k\pi - 1}{2} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 10.18

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion

$$f: y = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Aufgabe 10.18

$$f: y = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Aufgabe 10.18

$$f: y = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

$$f(0) = 4 \cos(0) = 4$$

Aufgabe 10.18

$$f: y = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

$$f(0) = 4 \cos(0) = 4$$

$$4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x_k = \pi + 2k\pi \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 10.19

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion
 $f: y = \tan(3x + \pi)$.

Aufgabe 10.19

$$f: y = \tan(3x + \pi).$$

Aufgabe 10.19

$$f: y = \tan(3x + \pi).$$

$$f(0) = \tan(\pi) = 0.$$

Aufgabe 10.19

$$f: y = \tan(3x + \pi).$$

$$f(0) = \tan(\pi) = 0.$$

$$\tan(3x + \pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + \pi = k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{(k-1)\pi}{3} \text{ für}$$

alle $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 10.20

Bestimme mit dem Taschenrechner alle Nullstellen der Funktion $f: y = e^x - 3x^2 + 1$ im Intervall $[-10, 10]$. (3 signifikante Stellen)

Aufgabe 10.20

$$f(x) = e^x - 3x^2 + 1$$

TI30X-Pro: Definiere in `table` die Funktion $f(x) = e^x - 3x^2 + 1$ und tabelliere die Funktion in Einerschritten von -10 bis 10 . Die Vorzeichenwechsel der Funktionswerte (und damit auch die Nullstellen) liegen in den folgenden Intervallen. Danach kann man mit `num-solv` und der Gleichung $f(x) = 0$ die genauen Werte innerhalb dieser Intervalle bestimmen.

$$\blacktriangleright -1 < x_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -0.706$$

$$\blacktriangleright 1 < x_2 < 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1.20$$

$$\blacktriangleright 3 < x_3 < 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.68$$