

Differenzialrechnung (Kapitel 9)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 9.1

Vereinfache den Ausdruck, sofern er definiert ist.

(a) $\infty + \infty$

(b) $\frac{-\infty}{\infty}$

(c) $\infty - 10^9$

(d) $-2 \cdot \infty$

(e) $\infty - \infty$

(f) $(-\infty) \cdot (-\infty)$

(g) $0 \cdot \infty$

(h) $-\infty - \infty$

Aufgabe 9.1

(a) $\infty + \infty = \infty$

(b) $\frac{-\infty}{\infty}$ nicht def.

(c) $\infty - 10^9 = \infty$

(d) $-2 \cdot \infty = -\infty$

(e) $\infty - \infty$ nicht def.

(f) $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

(g) $0 \cdot \infty$ nicht def.

(h) $-\infty - \infty = -\infty$

Beachte, dass ∞ und $-\infty$ keine Zahlen sondern Symbole sind, für die sich in einigen Fällen Regeln aus dem Rechnen mit (uneigentlichen) Grenzwerten definieren lassen.

Beispielsweise lässt sich (g) nicht sinnvoll definieren, denn

$$0 \cdot \infty = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

aber

$$0 \cdot \infty = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Bei (b) und (e) lassen sich ähnliche Mehrdeutigkeiten konstruieren.

Aufgabe 9.2

Klammere x^3 aus dem Term $5x^3 - 2x^2 + 8x - 1$ aus.

Aufgabe 9.2

$$5x^3 - 2x^2 + 8x - 1 = x^3 \left(5 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Aufgabe 9.3

Gegeben: $f(x) = x^2 - 4x^3 + 1$

Gesucht: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Aufgabe 9.3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 4x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^3) = -\infty$$

Aufgabe 9.4

Gegeben: $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

Gesucht: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Aufgabe 9.4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty\end{aligned}$$

Aufgabe 9.5

Gegeben: $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

Gesucht: asymptotische Näherungsfunktion g von f für $|x| \rightarrow \infty$

Aufgabe 9.5

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$$

Da die Zählerfunktion einen kleineren Grad als die Nennerfunktion hat, ist g die Nullfunktion:

$$g(x) = 0 \text{ (horizontale Asymptote).}$$

Aufgabe 9.6

Gegeben: $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 9}$

Gesucht: asymptotische Näherungsfunktion g von f für $|x| \rightarrow \infty$

Aufgabe 9.6

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 9}$$

Da die Zählerfunktion den gleichen Grad wie die Nennerfunktion hat, ist g der Quotient der Leitkoeffizienten:

$$g(x) = \frac{2}{1} = 2 \text{ (horizontale Asymptote)}$$

Aufgabe 9.7

Gegeben: $f(x) = \frac{6x^3 - 11x^2 + 7x - 5}{2x - 3}$

Gesucht: asymptotische Näherungsfunktion g von f für $|x| \rightarrow \infty$

Aufgabe 9.7

Da die Zählerfunktion einen grösseren Grad als die Nennerfunktion hat, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

$$\begin{array}{r} (6x^3 - 11x^2 + 7x - 5) : (2x - 3) = 3x^2 - x + 2 + \frac{1}{2x - 3} \\ \underline{-(6x^3 - 9x^2)} \\ -2x^2 + 7x \\ \underline{-(-2x^2 + 3x)} \\ 4x - 5 \\ \underline{-(4x - 6)} \\ 1 \end{array}$$

$$g(x) = 3x^2 - x + 2 \text{ (parabelförmige Asymptote)}$$

Aufgabe 9.8

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Aufgabe 9.8

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$

Aufgabe 9.8

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$

Aufgabe 9.9

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1)e^x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1)e^x$

Aufgabe 9.9

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1)e^x = 0$

Aufgabe 9.9

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1)e^x = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1)e^x = \infty$

Aufgabe 9.10

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2)$

Aufgabe 9.10

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = \infty$

Aufgabe 9.10

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = \infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2) = \infty$

Aufgabe 9.10

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = \infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2) = \infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) = -\infty$

Aufgabe 9.11

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

Aufgabe 9.11

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Aufgabe 9.11

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Aufgabe 9.12

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(2x)$$

Aufgabe 9.12

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(2x)$ ist nicht definiert

Aufgabe 9.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

Aufgabe 9.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2}{x}\right) = \cos(0) = 1$$

Aufgabe 9.14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{1 + x^2}$$

Aufgabe 9.14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2} = 0$$

Aufgabe 9.15

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)$

Aufgabe 9.15

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan(x)$ ist nicht definiert

Aufgabe 9.15

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan(x)$ ist nicht definiert

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty$

Aufgabe 9.16

Bestimme alle Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 2}$.

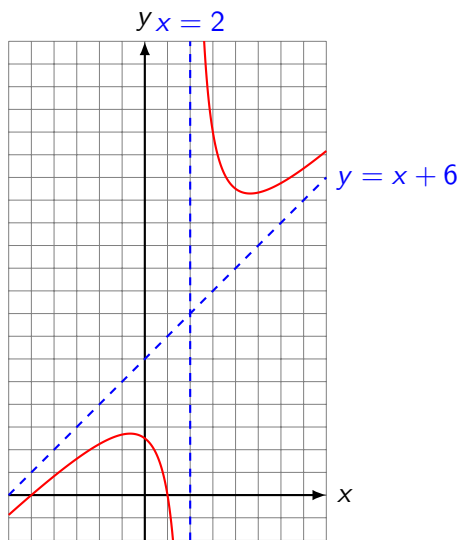
Aufgabe 9.16

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 2}$$

senkrechte Asymptote: $x = 2$

Polynomdivision: $(x^2 + 4x - 5) : (x - 2) = x + 6 + \frac{1}{x - 2}$

schiefe Asymptote: $y = x + 6$



Aufgabe 9.17

Bestimme alle Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - x - 2}$.

Aufgabe 9.17

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x+1)(x-2)}$$

senkrechte Asymptoten: $x = -1$, $x = 2$

$$\text{Polynomdivision: } (2x^2 - 5x + 3) : (x^2 - x - 2) = 2 + \frac{-3x + 7}{x^2 - x - 2}$$

horizontale Asymptote: $y = 2$

