

Differenzialrechnung (Kapitel 8)

Prüfungsvorbereitung

Stelle eine Vermutung auf, ob die gegebene Funktion f *gerade* oder *ungerade* ist, d.h. ob ihr Graph zur Ordinate oder zum Ursprung symmetrisch ist und beweise diese Vermutung. Andernfalls ist eine Zahl x_0 aus dem Definitionsbereich von f anzugeben, für die weder $f(-x_0) = f(x_0)$ noch $f(-x_0) = -f(x_0)$ gilt.

Hinweis: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

Aufgabe 8.1

$$f(x) = x^4 - 3x^2$$

Aufgabe 8.1

Vermutung: f ist gerade, da es sich um eine Summe von geraden Funktionen handelt. *Beweis:*

$$f(x) = x^4 - 3x^2$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Aufgabe 8.2

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

Aufgabe 8.2

Vermutung: $f(x) = x^2 + 3x + 4$ ist weder gerade noch ungerade, da es sich um eine Summe von geraden *und* ungeraden Funktionen handelt. *Beweis:* Mit $x = 1$ gilt

$$f(1) = 1 + 3 + 4 = 8$$

$$f(-1) = 1 - 3 + 4 = 2$$

und damit weder $f(-1) = f(1)$ noch $f(-1) = -f(1)$

Aufgabe 8.3

$$f(x) = \frac{x^9 + x^7}{x^4 + 2x^2}$$

Aufgabe 8.3

Vermutung: f ist ungerade, da es sich um einen Quotienten einer geraden und einer ungeraden Funktion handelt.

$$f(x) = \frac{x^9 + x^7}{x^4 + 2x^2}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^9 + (-x)^7}{(-x)^4 + 2(-x)^2} = \frac{-x^9 - x^7}{x^4 + 2x^2} = \frac{-(x^9 + x^7)}{x^4 + 2x^2} \\ &= -\frac{x^9 + x^7}{x^4 + 2x^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Aufgabe 8.4

$$f(x) = \cos(x) + 1$$

Aufgabe 8.4

Vermutung: f ist gerade, da es sich um eine Summe von geraden Funktionen handelt. *Beweis:*

$$f(x) = \cos(x) + 1$$

$$f(-x) = \cos(-x) + 1 = \cos(x) + 1$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Aufgabe 8.5

$$f(x) = x \sin(x)$$

Aufgabe 8.5

Vermutung: f ist ungerade, da es sich um ein Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktionen handelt. *Beweis:*

$$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin(x)) = -x \cdot \sin(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Aufgabe 8.6

$$f(x) = \log_2(x^2)$$

Aufgabe 8.6

Vermutung: f ist gerade, da die innere Funktion gerade ist. *Beweis:*

$$f(x) = \log_2 x^2$$

$$f(-x) = \log_2 (-x)^2 = \log_2 x^2$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Aufgabe 8.7

$$f(x) = |x| + 1$$

Aufgabe 8.7

Vermutung: $f(x) = |x| + 1$ ist gerade

$$f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1 = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 8.8

$$f(x) = |x + 1|$$

Aufgabe 8.8

Vermutung: $f(x) = |x + 1|$ ist weder gerade noch ungerade

$$f(-x) = |-x + 1| \neq |x + 1| \text{ z. B. für } x = 1$$

$$f(-x) = |-x + 1| \neq -|x + 1| \text{ z. B. für } x = 1$$

Aufgabe 8.9

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 8.9

Vermutung: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ist ungerade

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|} = -\frac{x}{|x|} = -f(x)$$