

Differenzialrechnung (Kapitel 7)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 7.1

Gib ohne Begründung an, ob die Funktion an der Stelle x_0 monoton wachsend oder monoton fallend ist.

(a) $f(x) = x^2$; $x_0 = -501$

(b) $f(x) = x^3$; $x_0 = 27$

(c) $f(x) = 1/x$; $x_0 = -72$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 93$

(e) $f(x) = e^x$; $x_0 = -44$

(f) $f(x) = \log_{10} x$; $x_0 = 0.2$

(g) $f(x) = \sin x$; $x_0 = 0.1$

(h) $f(x) = \cos x$; $x_0 = 0.1$

Aufgabe 7.1

Die Aufgaben können mit Hilfe der Formelsammlung oder des Taschenrechners gelöst werden. Am schnellsten geht es aber, wenn man den Verlauf der Graphen der elementaren Funktionen auswendig kennt.

- (a) $f(x) = x^2$ ist an der Stelle $x_0 = -501$ **monoton fallend**
- (b) $f(x) = x^3$ ist an der Stelle $x_0 = 27$ **monoton wachsend**
- (c) $f(x) = 1/x$ ist an der Stelle $x_0 = -72$ **monoton fallend**
- (d) $f(x) = \sqrt{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 93$ **monoton wachsend**
- (e) $f(x) = e^x$ ist an der Stelle $x_0 = -44$ **monoton wachsend**
- (f) $f(x) = \log_{10} x$ ist an der Stelle $x_0 = 0.2$ **monoton wachsend**
- (g) $f(x) = \sin x$ ist an der Stelle $x_0 = 0.1$ **monoton wachsend**
- (h) $f(x) = \cos x$ ist an der Stelle $x_0 = 0.1$ **monoton fallend**

Aufgabe 7.2

Ist die Funktion an der angegebenen Stelle monoton wachsend oder monoton fallend. Begründe die Antwort durch entsprechende Berechnungen.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7$; $x_0 = -1$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 3}$; $x_0 = 2$

(c) $f(x) = x \cdot \cos(x)$; $x_0 = 0$

(d) $f(x) = \ln x^2$; $x_0 = -1$

Aufgabe 7.2

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 7 > 0 \quad \text{monoton wachsend}$$

Aufgabe 7.2

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 7 > 0 \quad \text{monoton wachsend}$$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 3}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 2) \cdot (x - 3) - (x^2 + 2x - 6) \cdot 1}{(x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 6 - x^2 - 2x + 6}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x - 3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{4 - 12}{(-1)^2} = -8 < 0 \quad \text{monoton fallend}$$

(c) $f(x) = x \cdot \cos x$

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

$$f'(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0 \quad \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = x \cdot \cos x$

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

$$f'(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0 \quad \text{monoton wachsend}$$

(d) $f(x) = \ln x^2$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

$$f'(-1) = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \quad \text{monoton fallend}$$

Aufgabe 7.3

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion
 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 1$ monoton wachsend
bzw. monoton fallend ist, mit einer geeigneten Tabelle.

Aufgabe 7.3

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 1$$

$$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

Stellen mit horizontaler Tangente:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0 \stackrel{\text{TR}}{\Rightarrow} x_1 = 1, x_2 = x_3 = 4$$

Daraus die Faktorisierung der Ableitungsfunktion ablesen:

$$f'(x) = (x - 1)(x - 4)(x - 4)$$

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 4$	$4 < x < \infty$
$x - 1$	-	+	+
$x - 4$	-	-	+
$x - 4$	-	-	+
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Aufgabe 7.4

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion
 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x + 1$ monoton wachsend
bzw. monoton fallend ist, mit einer geeigneten Tabelle.

Aufgabe 7.4

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x + 1$$

$$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$$

Stellen mit horizontaler Tangente:

$$f'(x) = 0 \stackrel{\text{TR}}{\Rightarrow} x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$$

Daraus die Faktorisierung der Ableitungsfunktion ablesen:

$$f'(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
$x - 1$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	+	+
$x - 5$	-	-	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$				