Aufgabe 1.1

$$\tfrac{1}{3}\big(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\big)=2\vec{b}-\tfrac{1}{2}\big(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\big)\quad ||\cdot 6$$

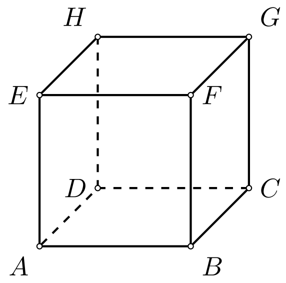
$$2\big(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\big)=12\vec{b}-3\big(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\big)$$

$$4\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}=6\vec{b}-3\vec{a}+9\vec{c}$$

$$7\vec{a}=8\vec{b}+7\vec{c}$$

$$\vec{a}=\tfrac{8}{7}\vec{b}+\vec{c}$$

Aufgabe 1.2



(a) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$

(b) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$

(c) $\overrightarrow{AG}$

Aufgabe 1.3

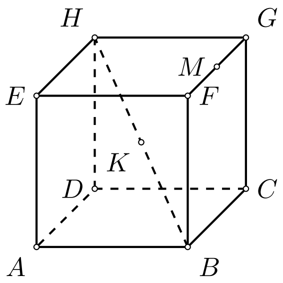
(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YX}=\overrightarrow{XX}=\vec{0}$

(c) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}$

(d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

Aufgabe 1.4



(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(c) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

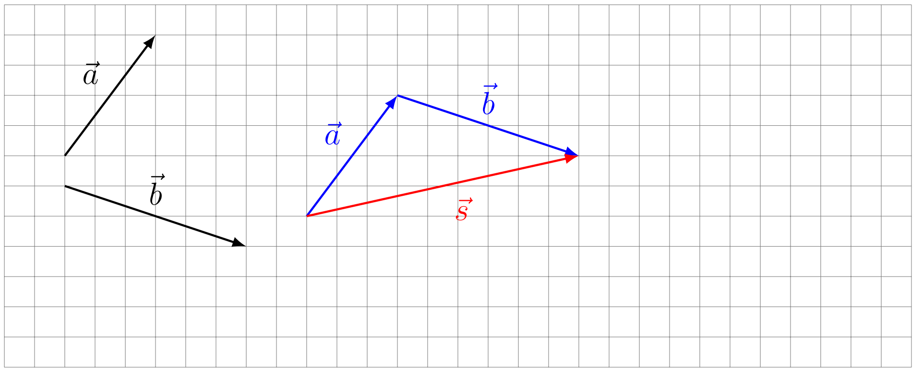
(d) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(e) $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

(f) $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

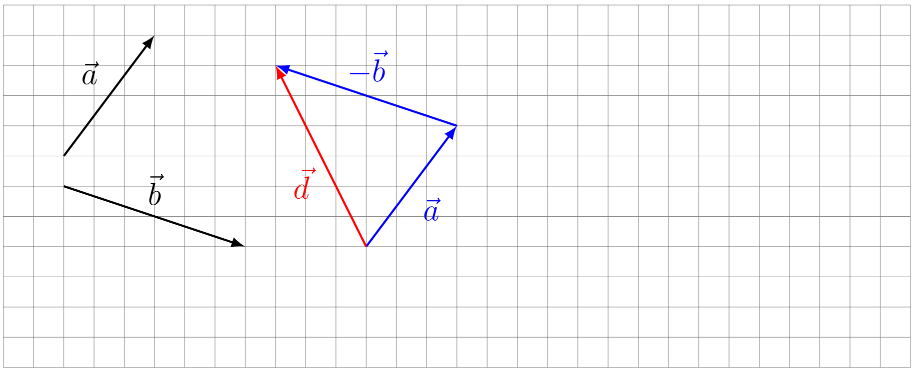
Aufgabe 1.5

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$



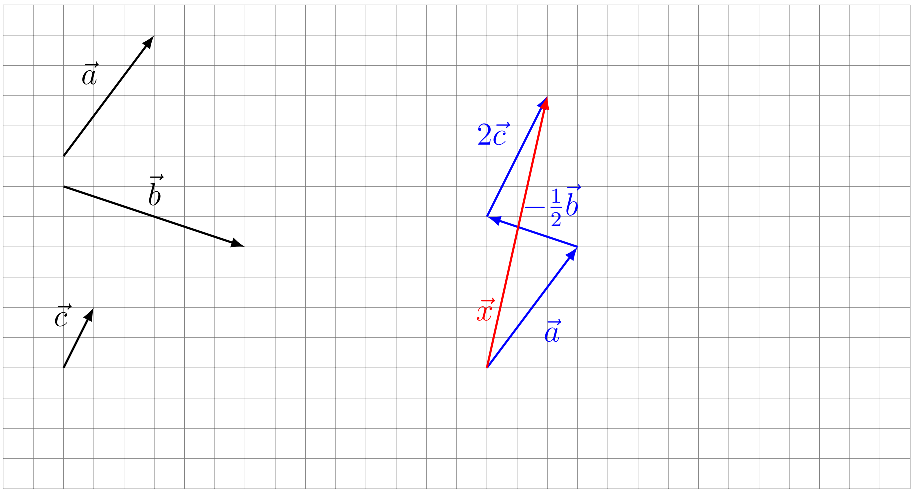
Aufgabe 1.6

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



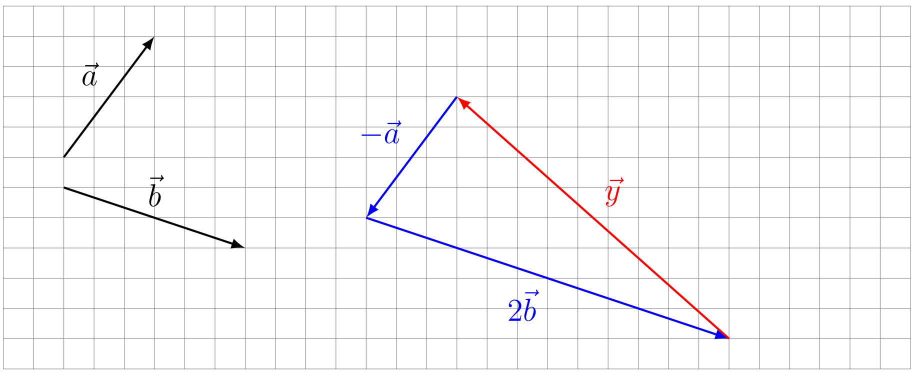
Aufgabe 1.7

$\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$ (war in den Kurzlösungen falsch)

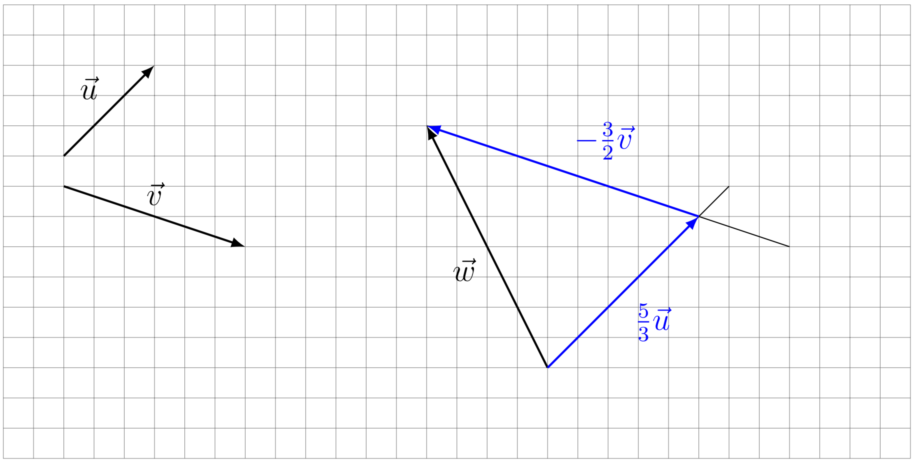


Aufgabe 1.8

$-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{y} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = ?$



Aufgabe 1.9



$\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

Aufgabe 2.1

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ hat.

Aufgabe 2.2

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$$

nicht nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ hat.

Aufgabe 2.3

- $\vec{a} = -2\vec{d}$ oder $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{a}$
- $\vec{c} = -\frac{5}{2}\vec{e}$ oder $\vec{e} = -\frac{2}{5}\vec{c}$

Aufgabe 2.4

(a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GH}$: linear unabhängig

(b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{BD}$: linear abhängig: $(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BD} = \vec{0})$

(c) $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$: linear unabhängig

(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EH}$: linear unabhängig

(e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$: linear abhängig $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EG} = \vec{0})$

(f) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GF}$: linear abhängig $(\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HB} = \vec{0})$

Aufgabe 3.1

(a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{v} = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Achtung: Reihenfolge)

(c) $-\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

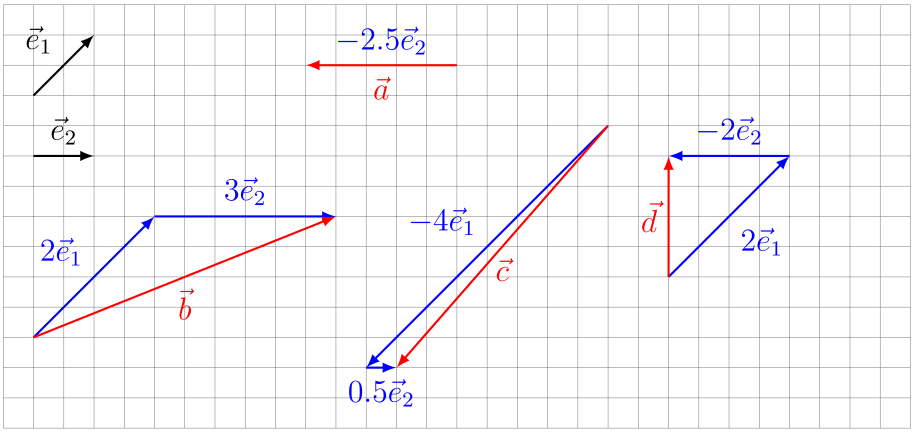
Aufgabe 3.2

(a) $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

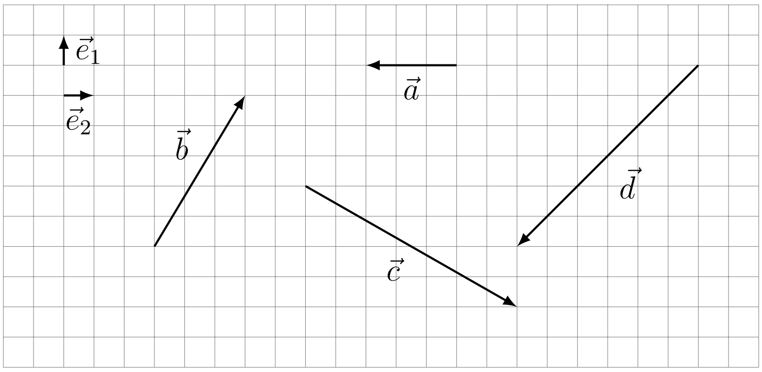
(b) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -18 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.3

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

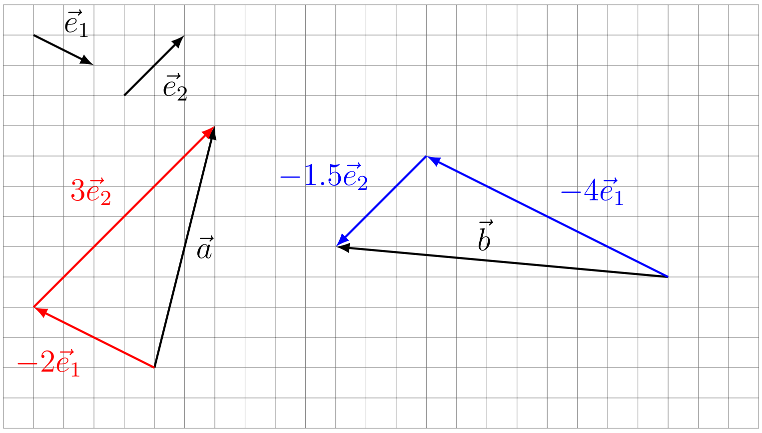


Aufgabe 3.4



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.5



$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.6

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eine Vektorkette (Linearkombination) ist genau dann geschlossen, wenn ihre Summe der Nullvektor ist.

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{c}$$

$$3\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = \tfrac{1}{3}\big(\vec{a} + 2\vec{b}\big)$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.7

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ -18 \\ 45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$

Ja, denn $\frac{2}{3}\vec{a} = \vec{b}$ und damit $\frac{2}{3} \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$

Aufgabe 3.8

Es ist nicht nötig, das Gleichungssystem

$4\alpha + \beta + 5\gamma = 0$
$3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$

zu lösen, weil *drei* Vektoren im *zweidimensionalen Raum* immer linear abhängig sind.

Aufgabe 3.9

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 5 - 2\gamma \\ \beta = -1 - \gamma \\ \gamma = \gamma \end{array}$$

wähle $\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5,\ \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 5\vec{a} - \vec{b}$

geometrische Deutung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig und der Vektor $\vec{v}$ liegt in dem von diesen Vektoren gebildeten Raum (hier: Ebene) Somit gibt es undendlich viele Lösungsmöglichkeiten.

Aufgabe 3.10

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

geometrische Deutung: Die drei Vektoren sind parallel zu einer Ebene (komplanar) aber der Vektor $\vec{v}$ nicht. Somit lässt sich $\vec{v}$ nicht durch eine Linearkombination der anderen Vektoren ausdrücken.

Aufgabe 3.11

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 3 \end{array}$$

$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

geometrische Deutung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig; daher lässt sich der Vektor $\vec{v}$ eindeutig durch sie darstellen und es gibt genau eine Lösung.

Aufgabe 3.12

Für Kollinearität muss es eine Zahl k mit $\vec{a} = k\vec{b}$ geben:

$$\begin{aligned} 16 &= k \cdot x \\ -24 &= k \cdot 18 \\ -12 &= k \cdot z \end{aligned}$$

Die mittlere Gleichung lässt sich nach k auflösen: $k = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}$

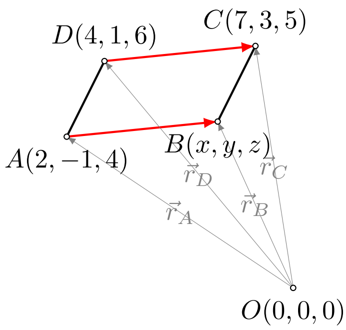
Einsetzen in die erste und letzte Gleichung:

$x = 16 : k = 16 : \left(-\frac{4}{3}\right) = -12$

$z = -12 : k = -12 : \left(-\frac{4}{3}\right) = 9$

$$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(5,1,3)$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1,5,-4)$ und Mitte $M(-9,8,4)$ der Strecke AB.
Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_B\big) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A = 2\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(-19,11,12)$

Aufgabe 4.3

(a) $P(0,3,0)$ liegt auf der y-Achse

(b) $Q(-1,0,4)$ liegt in der xz-Ebene

Aufgabe 4.4

(a) $P(4,-7,3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4,-7,-3)$

(b) $P(4,-7,3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4,7,3)$

(c) $P(4,-7,3)$ am Ursprung spiegeln: $P'(-4,7,-3)$

(d) $P(4,-7,3)$ am Punkt $Z(-1,-6,1)$ spiegeln: $P'(-6,-5,-1)$