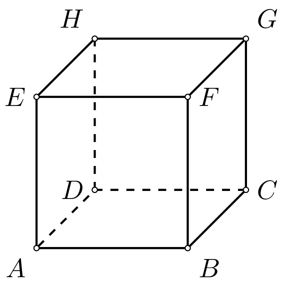
Aufgabe 1.1

Löse die Gleichung $\frac{1}{3}\left(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$ nach $\vec{a}$ auf und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 1.2

Die Figur stellt einen Würfel dar.



Gib mit Hilfe der Eckpunkte alle Pfeile an, die den folgenden Vektor repräsentieren:

(a) $\overrightarrow{BC}$

(b) $\overrightarrow{DE}$

(c) $\overrightarrow{AG}$

Aufgabe 1.3

Vereinfache den folgenden Ausdruck so weit wie möglich.

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

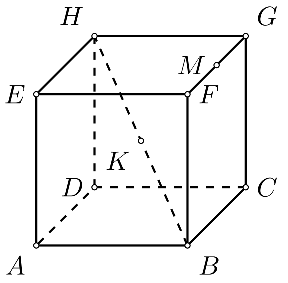
(b) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX}$

(c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}$

(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

Aufgabe 1.4

Im Würfel ist K Mitte der Diagonale HB und M ist Mitte der Kante FG.



Drücke die folgenden Vektoren durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ aus.

(a) $\overrightarrow{AF}$

(b) $\overrightarrow{AM}$

(c) $\overrightarrow{CM}$

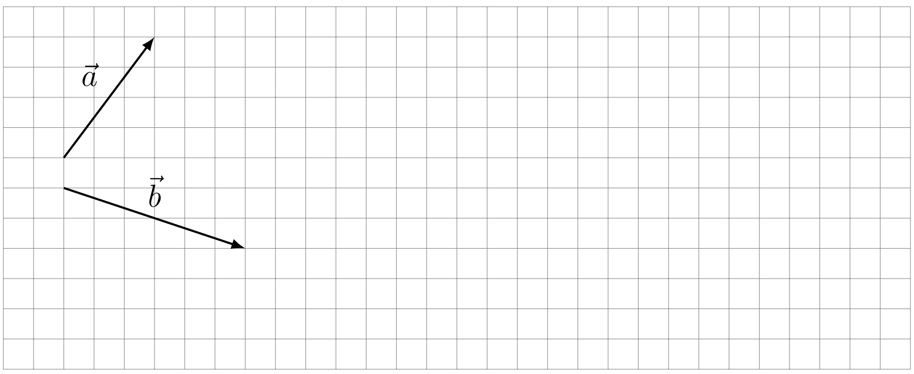
(d) $\overrightarrow{AK}$

(e) $\overrightarrow{MK}$

(f) $\overrightarrow{CK}$

Aufgabe 1.5

Konstruiere eine Repräsentanten des Vektors $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

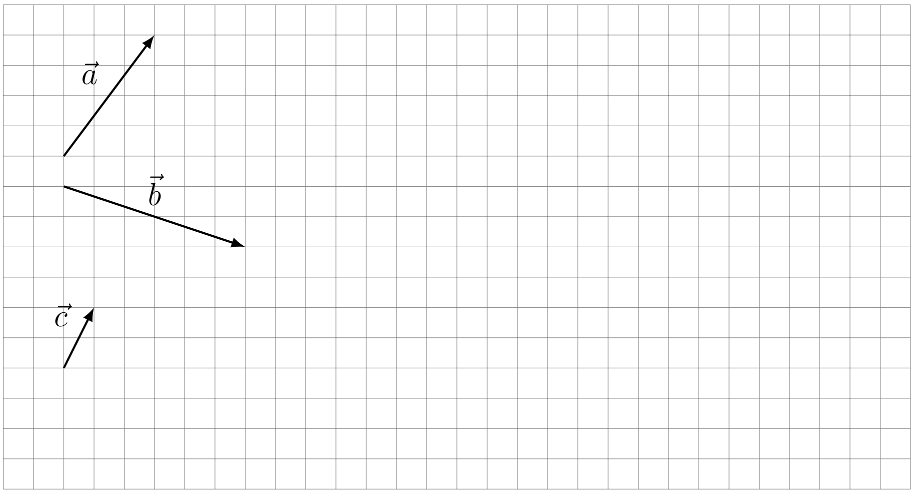


Aufgabe 1.6

Konstruiere einen Repräsentanten des Vektors $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

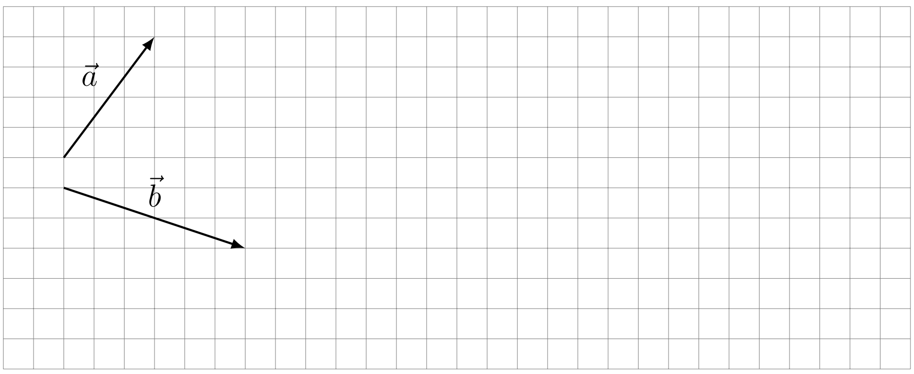
Aufgabe 1.7

Konstruiere einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.



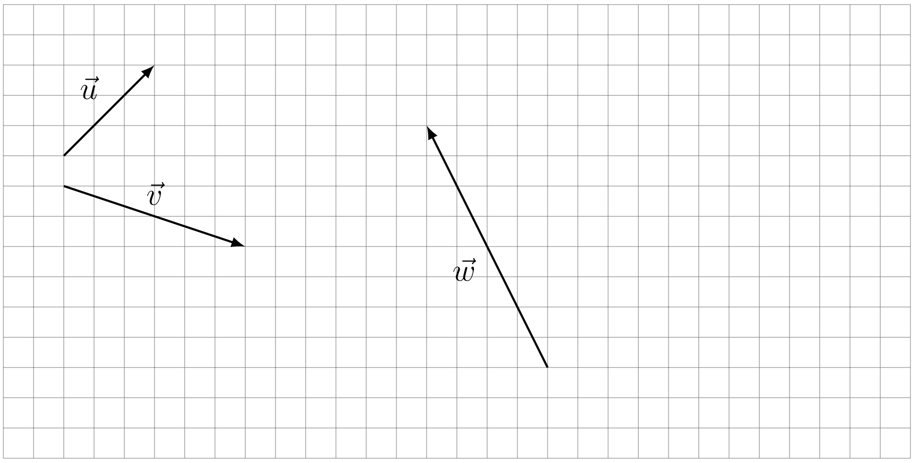
Aufgabe 1.8

Konstruiere einen Repräsentanten des Vektors $\vec{y}$, der die Gleichung $-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{y} = \vec{0}$ erfüllt.



Aufgabe 1.9

Zerlege den Repräsentanten von $\vec{w}$ konstruktiv in eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Bestimme ferner die Koeffizienten α und β von $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.



Aufgabe 2.1

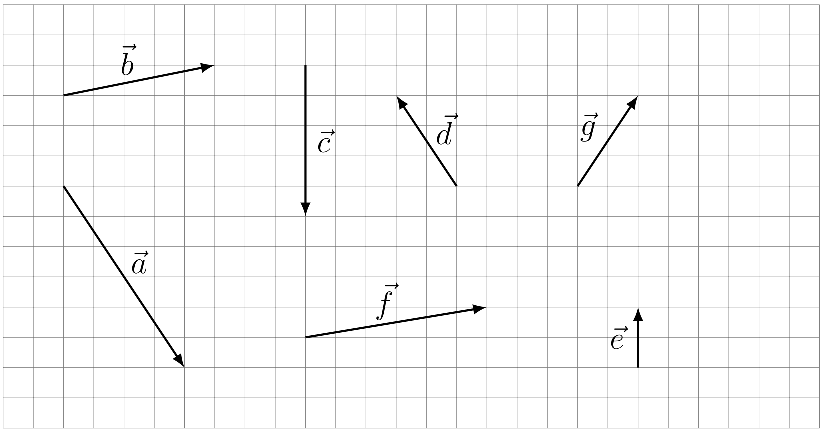
Wann sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig?

Aufgabe 2.2

Wann sind vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig?

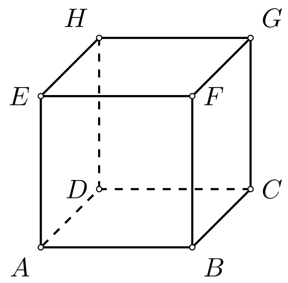
Aufgabe 2.3

Gib alle Paare von Vektoren an, die kollinear sind.



Aufgabe 2.4

Sind die folgenden Vektoren mit den Endpunkten auf den Ecken des Würfels $ABCDEFGH$ linear abhängig oder linear unabhängig?



(a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GH}$

(b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{BD}$

(c) $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$

(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EH}$

(e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$

(f) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GF}$

Aufgabe 3.1

Die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bilden eine Basis des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$.
Gib die Komponentendarstellung der folgenden Vektoren an.

(a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_3$

(b) $\vec{v} = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1$

(c) $-\vec{v}$

(d) $\vec{e}_2$

(e) $\vec{0}$

Aufgabe 3.2

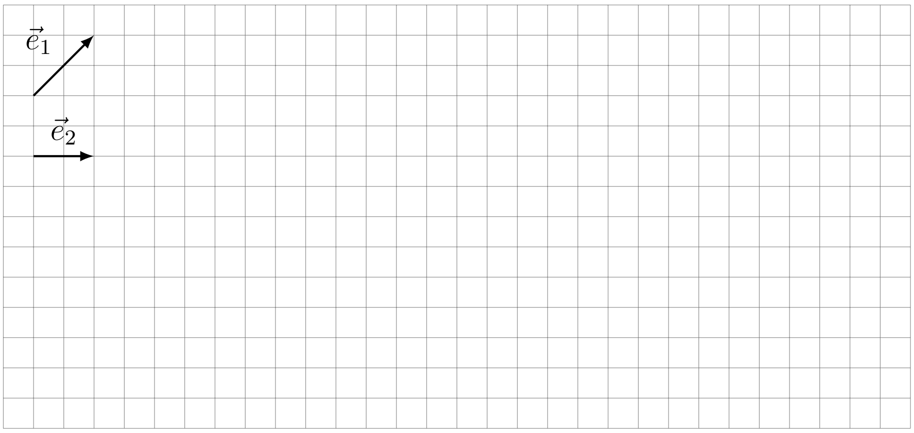
Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.6 \\ 1.4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$.
Gesucht: Komponentendarstellung der Linearkombinationen

(a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

(b) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{c}$

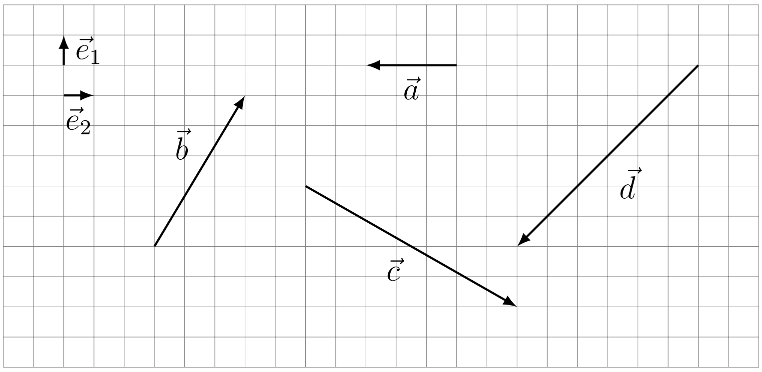
Aufgabe 3.3

Zeichne je einen Repräsentanten der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



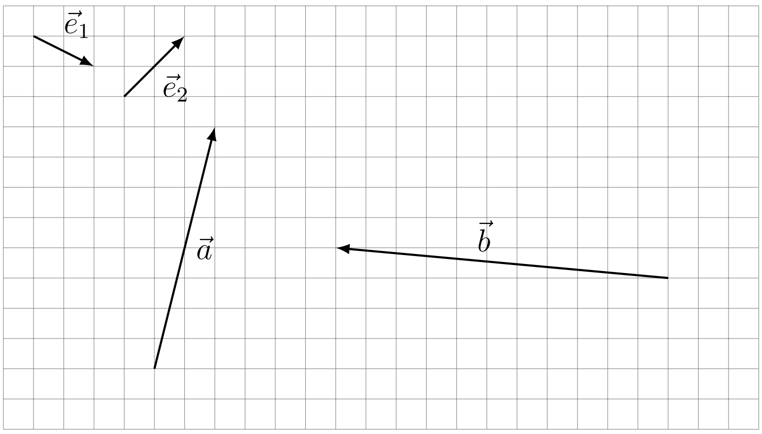
Aufgabe 3.4

Gib die Komponentendarstellungen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ an.



Aufgabe 3.5

Bestimme konstruktiv die Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



Aufgabe 3.6

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Für welche Komponenten des Vektors $\vec{c}$ bildet $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ eine geschlossene Vektorkette?

Aufgabe 3.7

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ -18 \\ 45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$ kollinear? Begründe die Antwort.

Aufgabe 3.8

Untersuche, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3.9

Ist es möglich, den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ darzustellen? Wenn ja, gib die (oder eine) Lösung an.

Aufgabe 3.10

Ist es möglich, den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ darzustellen? Wenn ja, gib die (oder eine) Lösung an.

Aufgabe 3.11

Ist es möglich, den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

darzustellen? Wenn ja, gib die (oder eine) Lösung an.

Aufgabe 3.12

Bestimme die Werte der Parameter x und z, so dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 18 \\ z \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 4.1

Bestimme den Punkt B, so dass $A(2, -1, 4)$, B, $C(7, 3, 5)$ und $D(4, 1, 6)$ in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden.

Aufgabe 4.2

Der Punkt $M(-9, 8, 4)$ ist der Mittelpunkt der Strecke mit den Ecken $A(1, 5, -4)$ und B. Bestimme die Koordinaten von B.

Aufgabe 4.3

Beschreibe möglichst genau die besondere Lage der Punkte.

(a) $P(0, 3, 0)$

(b) $Q(-1, 0, 4)$

Aufgabe 4.4

Spiegle den Punkt $P(4, -7, 3)$ ...

(a) an der xy-Ebene,

(b) an der z-Achse,

(c) am Ursprung,

(d) am Punkt $Z(-1, -6, 1)$.