Aufgabe 1.1

$$\tfrac{1}{3}\big(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\big) = 2\vec{b}-\tfrac{1}{2}\big(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\big) \quad || \cdot 6$$

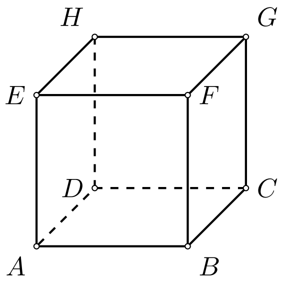
$$2\big(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\big) = 12\vec{b}-3\big(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\big)$$

$$4\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c} = 6\vec{b}-3\vec{a}+9\vec{c}$$

$$7\vec{a} = 8\vec{b}+7\vec{c}$$

$$\vec{a} = \tfrac{8}{7}\vec{b}+\vec{c}$$

Aufgabe 1.2



(a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$

(b) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$

(c) $\overrightarrow{AG}$

Aufgabe 1.3

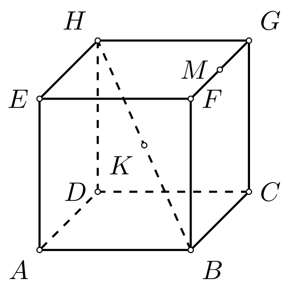
(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$

(c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

Aufgabe 1.4



(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(c) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

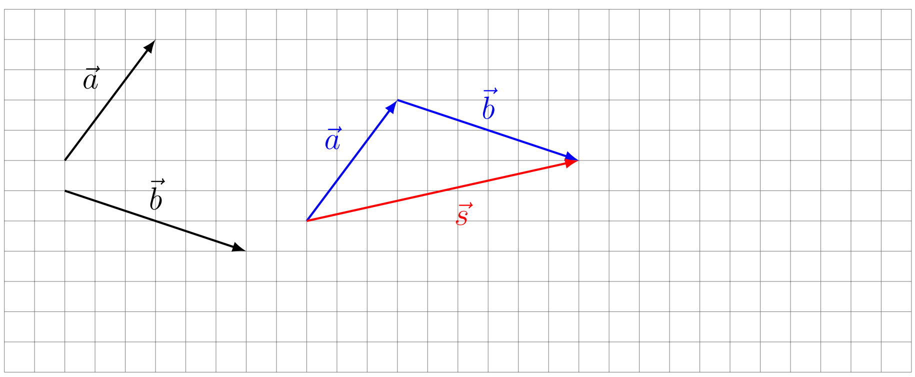
(d) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(e) $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

(f) $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

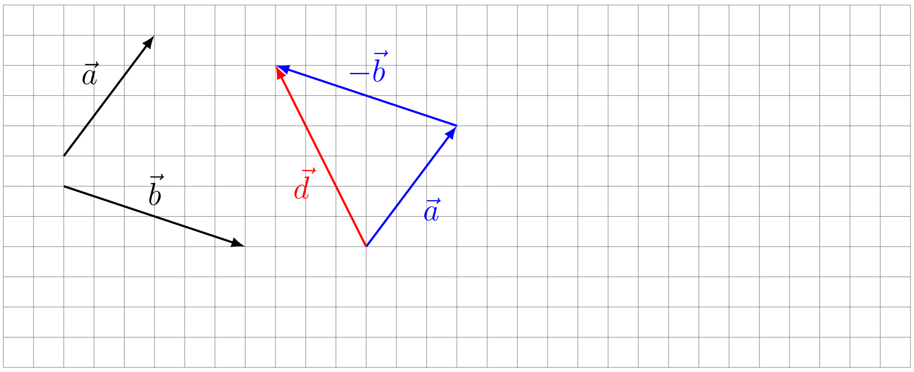
Aufgabe 1.5

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$



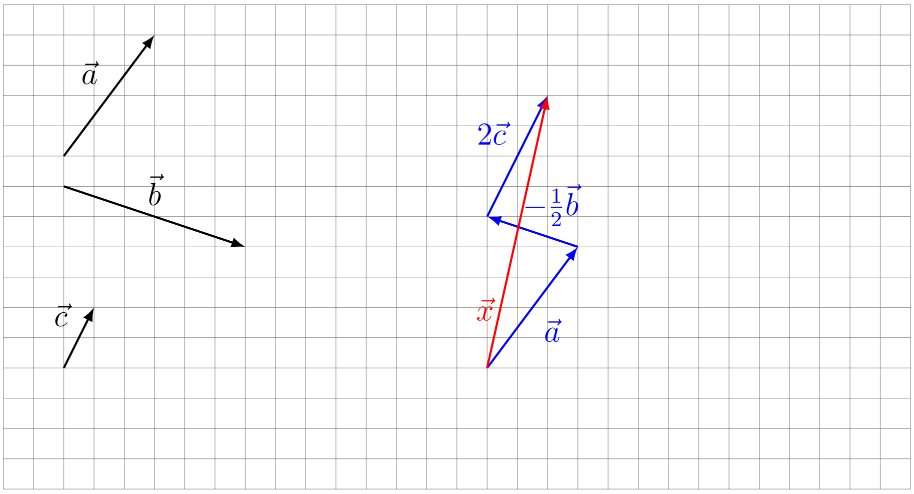
Aufgabe 1.6

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



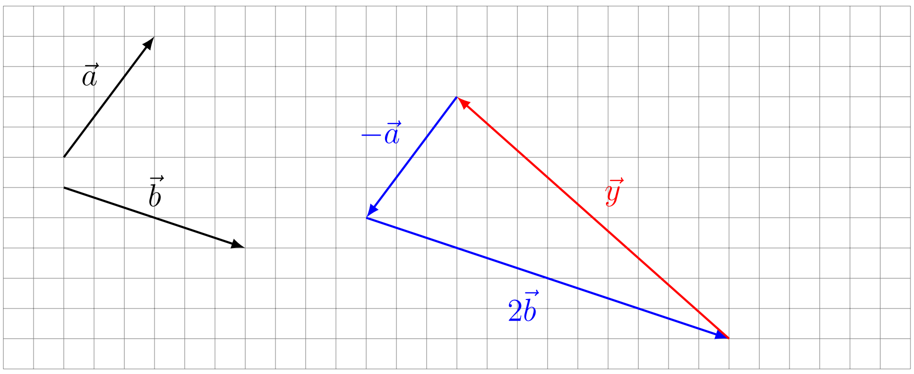
Aufgabe 1.7

$\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$ (war in den Kurzlösungen falsch)

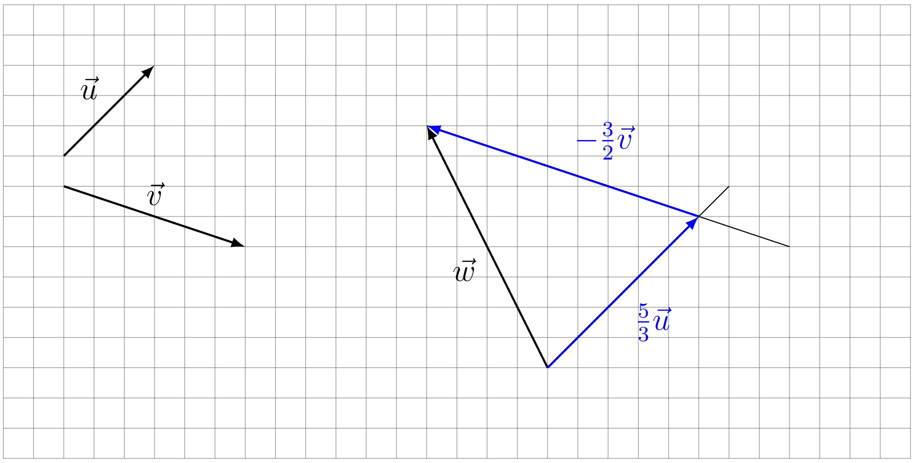


Aufgabe 1.8

$-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{y} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = ?$



Aufgabe 1.9



$\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

Aufgabe 2.1

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ hat.

Aufgabe 2.2

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$$

nicht nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ hat.

Aufgabe 2.3

- $\vec{a} = -2\vec{d}$ oder $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{a}$
- $\vec{c} = -\frac{5}{2}\vec{e}$ oder $\vec{e} = -\frac{2}{5}\vec{c}$

Aufgabe 2.4

(a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GH}$: linear unabhängig

(b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{BD}$: linear abhängig: $(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BD} = \vec{0})$

(c) $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$: linear unabhängig

(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EH}$: linear unabhängig

(e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$: linear abhängig $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EG} = \vec{0})$

(f) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GF}$: linear abhängig $(\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HB} = \vec{0})$

Aufgabe 3.1

(a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{v} = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Achtung: Reihenfolge)

(c) $-\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

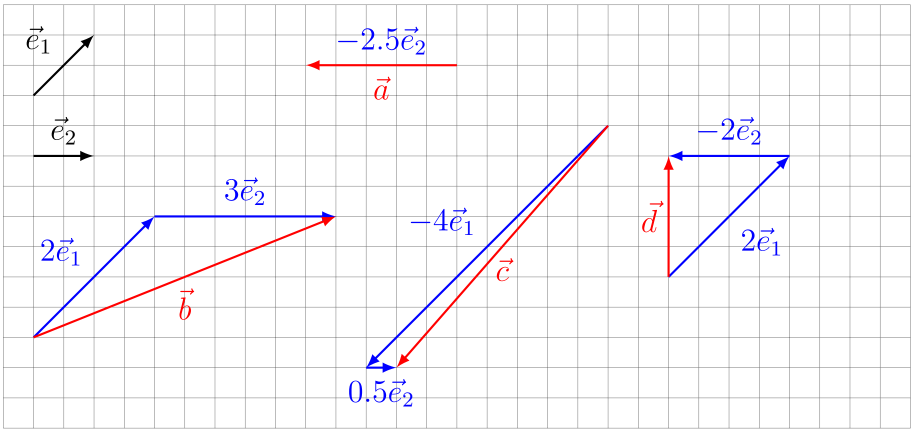
Aufgabe 3.2

(a) $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

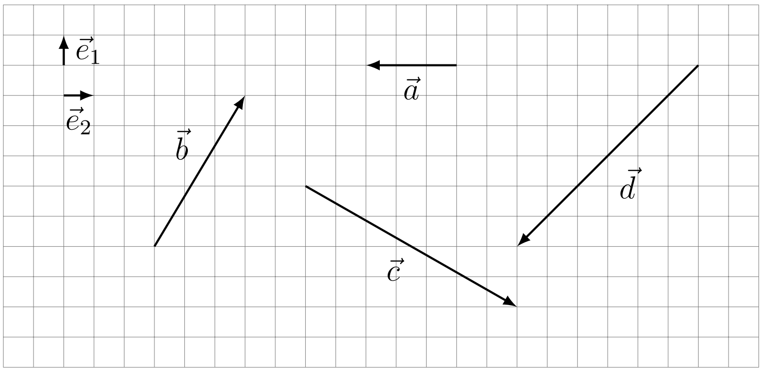
(b) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -18 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.3

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

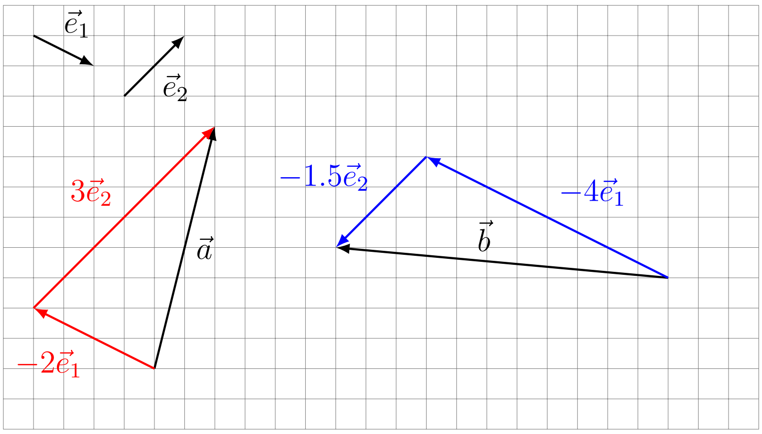


Aufgabe 3.4



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.5



$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.6

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eine Vektorkette (Linearkombination) ist genau dann geschlossen, wenn ihre Summe der Nullvektor ist.

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + 2\vec{b} &= 3\vec{c} \\ 3\vec{c} &= \vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{c} &= \tfrac{1}{3}\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ -18 \\ 45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$

Ja, denn $\frac{2}{3}\vec{a} = \vec{b}$ und damit $\frac{2}{3} \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$

Aufgabe 3.8

Es ist nicht nötig, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4\alpha + \beta + 5\gamma &= 0 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen, weil *drei* Vektoren im *zweidimensionalen Raum* immer linear abhängig sind.

Aufgabe 3.9

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 5 - 2\gamma \\ \beta &= -1 - \gamma \\ \gamma &= \gamma \end{aligned}$$

wähle $\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5, \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 5\vec{a} - \vec{b}$

geometrische Deutung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig und der Vektor $\vec{v}$ liegt in dem von diesen Vektoren gebildeten Raum (hier: Ebene) Somit gibt es undendlich viele Lösungsmöglichkeiten.

Aufgabe 3.10

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

geometrische Deutung: Die drei Vektoren sind parallel zu einer Ebene (komplanar) aber der Vektor $\vec{v}$ nicht. Somit lässt sich $\vec{v}$ nicht durch eine Linearkombination der anderen Vektoren ausdrücken.

Aufgabe 3.11

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 3 \end{array}$$

$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

geometrische Deutung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig; daher lässt sich der Vektor $\vec{v}$ eindeutig durch sie darstellen und es gibt genau eine Lösung.

Aufgabe 3.12

Für Kollinearität muss es eine Zahl k mit $\vec{a} = k\vec{b}$ geben:

$$\begin{aligned} 16 &= k \cdot x \\ -24 &= k \cdot 18 \\ -12 &= k \cdot z \end{aligned}$$

Die mittlere Gleichung lässt sich nach k auflösen: $k = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}$

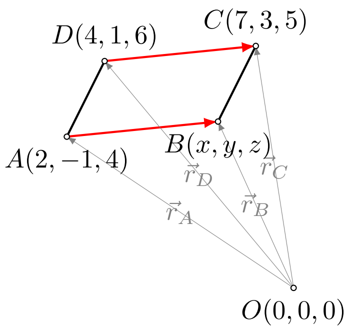
Einsetzen in die erste und letzte Gleichung:

$x = 16 : k = 16 : \left(-\frac{4}{3}\right) = -12$

$z = -12 : k = -12 : \left(-\frac{4}{3}\right) = 9$

$$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(5,1,3)$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1,5,-4)$ und Mitte $M(-9,8,4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_B\big) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A = 2\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(-19,11,12)$

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7,-3,9)$, $B(-5,1,2)$, $C(0,6,3)$ und $D(8,4,4)$

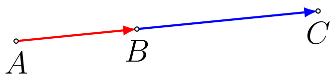
$$\vec{r}_S = \tfrac{1}{4} \cdot \big[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\big] \quad \text{(Schwerpunktformel)}$$

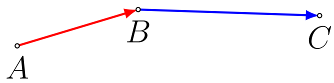
$$\vec{r}_S = \tfrac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 4.5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(2.5, 2, 4.5)$$

Aufgabe 4.4

Wenn $A(3, 5, -8)$, $B(1, 6, -3)$, $C(9, 2, -23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).





$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad \text{mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2k &= 8 & & & k &= -4 \\ k &= -4 & &\Rightarrow & k &= -4 \\ 5k &= 20 & & & k &= -4 \end{aligned}$$

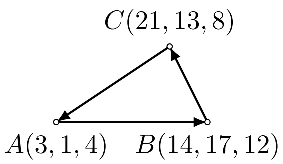
Somit sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear und A, B und C liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 4.5

Punkte $A(-7, 1, 3)$ und $B(9, -3, 11)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P - \vec{r}_A &= \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P &= \vec{r}_A + \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{8}\begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(-1, -0.5, 6) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.6



$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{121 + 256 + 64} = \sqrt{441} = 21$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 16 + 16} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \left| \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{324 + 144 + 16} = \sqrt{484} = 22$$

$u = 9 + 21 + 22 = 52$

Aufgabe 4.7

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\begin{pmatrix}16\\-12\\15\end{pmatrix}\right| = \sqrt{256+144+225} = \sqrt{625} = 25$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}16\\-12\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.64\\-0.48\\0.6\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}16\\-12\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.64\\0.48\\-0.6\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.8

$A(1,y,5)$, $B(7,6,3)$

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= 11\\
\left|\begin{pmatrix}6\\6-y\\-2\end{pmatrix}\right| &= 11\\
\sqrt{36+(6-y)^2+4} &= 11\\
\sqrt{40+(6-y)^2} &= 11\\
40+(6-y)^2 &= 121\\
(6-y)^2 &= 81\\
6-y &= \pm 9\\
y_1 &= -3\\
y_2 &= 15
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.9

$A(11,8,-9)$; $B(6,-3,5)$; Punkt auf z-Achse: $P(0,0,z)$

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{PA}\right| &= 3\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|\\
\left|\begin{pmatrix}11\\8\\-9-z\end{pmatrix}\right| &= 3\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\-3\\5-z\end{pmatrix}\right|\\
\sqrt{121+64+(-9-z)^2} &= 3\cdot\sqrt{36+9+(5-z)^2} \quad ||^2\\
185+81+18z+z^2 &= 9\cdot\left(36+9+25-10z+z^2\right)\\
z^2+18z+266 &= 9z^2-90z+630\\
0 &= 8z^2-108z+364\\
z_1 &= 6.5 \quad\Rightarrow\quad P_1(0,0,6.5)\\
z_2 &= 7 \quad\Rightarrow\quad P_2(0,0,7)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.10

(a) $P(0,3,0)$ liegt auf der y-Achse

(b) $Q(-1,0,4)$ liegt in der xz-Ebene

Aufgabe 4.11

(a) $P(4,-7,3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4,-7,-3)$

(b) $P(4,-7,3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4,7,3)$

(c) $P(4,-7,3)$ am Ursprung spiegeln: $P'(-4,7,-3)$

(d) $P(4,-7,3)$ am Punkt $Z(-1,-6,1)$ spiegeln: $P'(-6,-5,-1)$