Vektorgeometrie (Kapitel 1–4)

Prüfungsvorbereitung (4a)

Aufgabe 1.1

Löse die Gleichung $\frac{1}{3}\left(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$ nach $\vec{a}$ auf und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 1.1

$$\tfrac{1}{3}\left(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=2\vec{b}-\tfrac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)\quad \| \cdot 6$$

$$2\left(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=12\vec{b}-3\left(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)$$

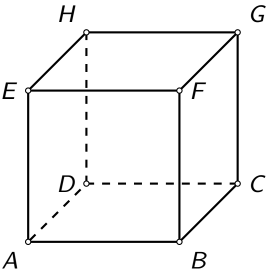
$$4\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}=6\vec{b}-3\vec{a}+9\vec{c}$$

$$7\vec{a}=8\vec{b}+7\vec{c}$$

$$\vec{a}=\tfrac{8}{7}\vec{b}+\vec{c}$$

Aufgabe 1.2

Die Figur stellt einen Würfel dar.



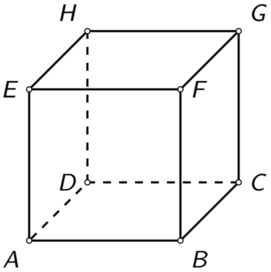
Gib mit Hilfe der Eckpunkte alle Pfeile an, die den folgenden Vektor repräsentieren:

(a) $\overrightarrow{BC}$

(b) $\overrightarrow{DE}$

(c) $\overrightarrow{AG}$

Aufgabe 1.2



(a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$

(b) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$

(c) $\overrightarrow{AG}$

Aufgabe 1.3

Vereinfache den folgenden Ausdruck so weit wie möglich.

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

(b) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX}$

(c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}$

(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$

(c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

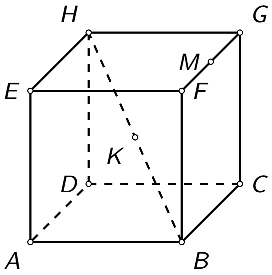
(b) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$

(c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

Aufgabe 1.4

Im Würfel ist K Mitte der Diagonale HB und M ist Mitte der Kante FG.



Drücke die folgenden Vektoren durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ aus.

(a) $\overrightarrow{AF}$

(b) $\overrightarrow{AM}$

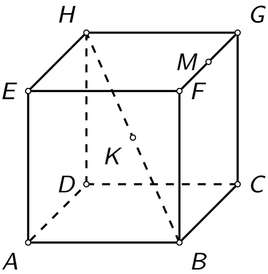
(c) $\overrightarrow{CM}$

(d) $\overrightarrow{AK}$

(e) $\overrightarrow{MK}$

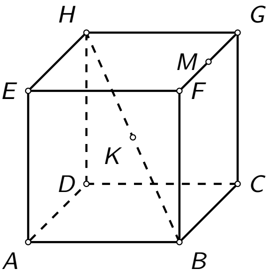
(f) $\overrightarrow{CK}$

Aufgabe 1.4



(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

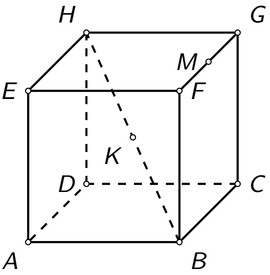
Aufgabe 1.4



(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

Aufgabe 1.4

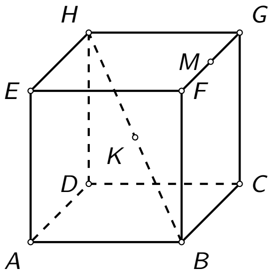


(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(c) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

Aufgabe 1.4



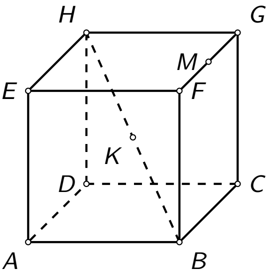
(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(c) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(d) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Aufgabe 1.4



(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

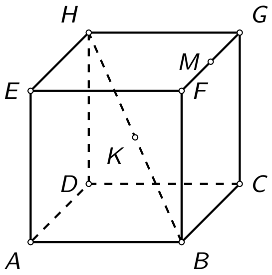
(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(c) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(d) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(e) $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

Aufgabe 1.4



(a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$

(b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(c) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

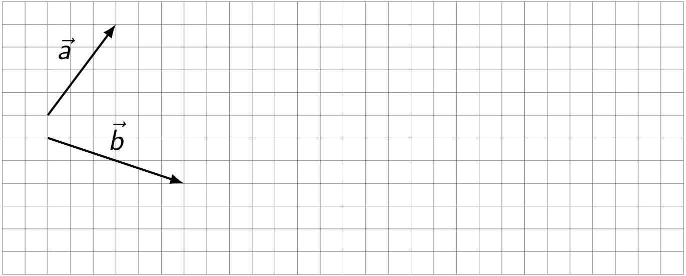
(d) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(e) $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

(f) $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

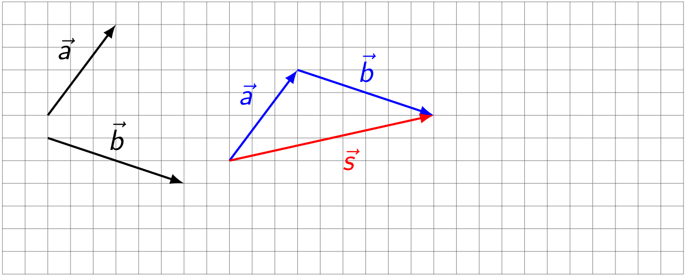
Aufgabe 1.5

Konstruiere eine Repräsentanten des Vektors $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.



Aufgabe 1.5

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

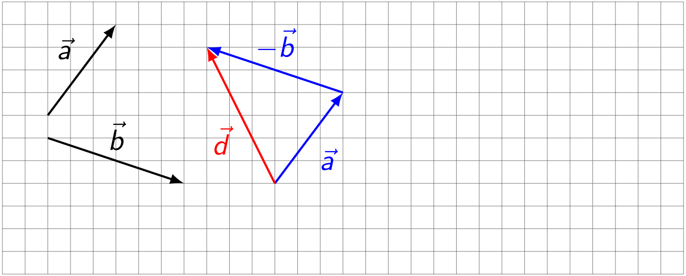


Aufgabe 1.6

Konstruiere einen Repräsentanten des Vektors $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Aufgabe 1.6

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

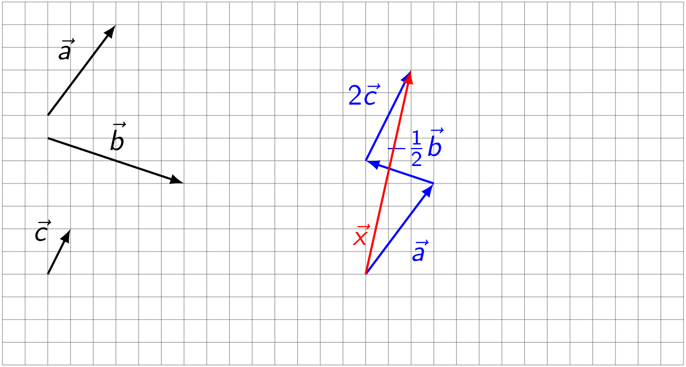


Aufgabe 1.7

Konstruiere einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.

Aufgabe 1.7

$\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$ (war in den Kurzlösungen falsch)

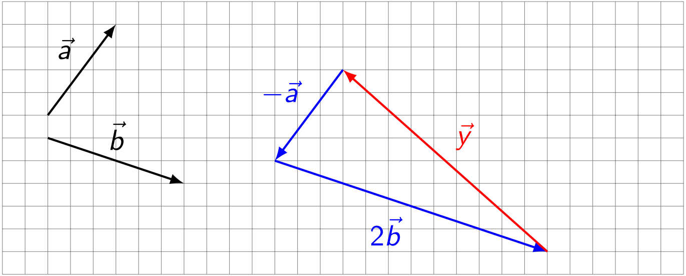


Aufgabe 1.8

Konstruiere einen Repräsentanten des Vektors $\vec{y}$, der die Gleichung $-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{y} = \vec{0}$ erfüllt.

Aufgabe 1.8

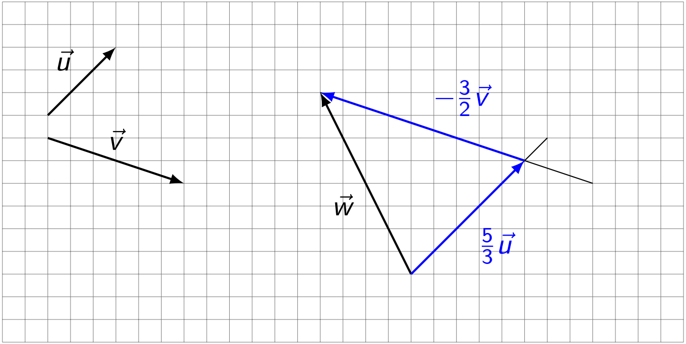
$$-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{y} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = ?$$



Aufgabe 1.9

Zerlege den Repräsentanten von $\vec{w}$ konstruktiv in eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Bestimme ferner die Koeffizienten α und β von $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Aufgabe 1.9



$$\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$$

Aufgabe 2.1

Wann sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig?

Aufgabe 2.1

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ hat.

Aufgabe 2.2

Wann sind vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig?

Aufgabe 2.2

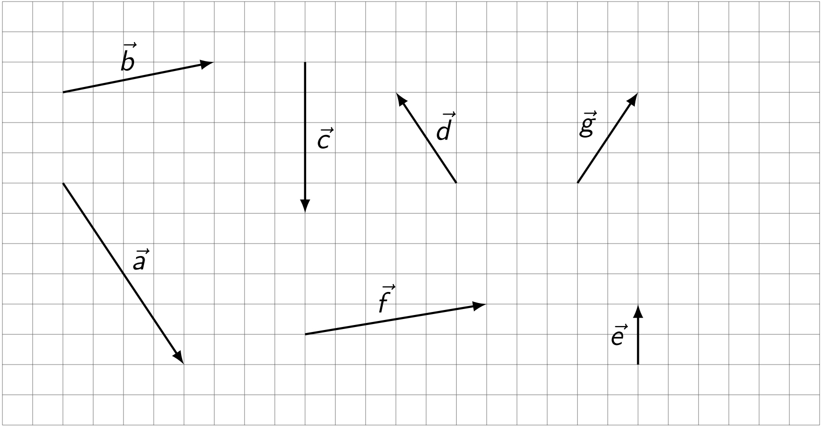
Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$$

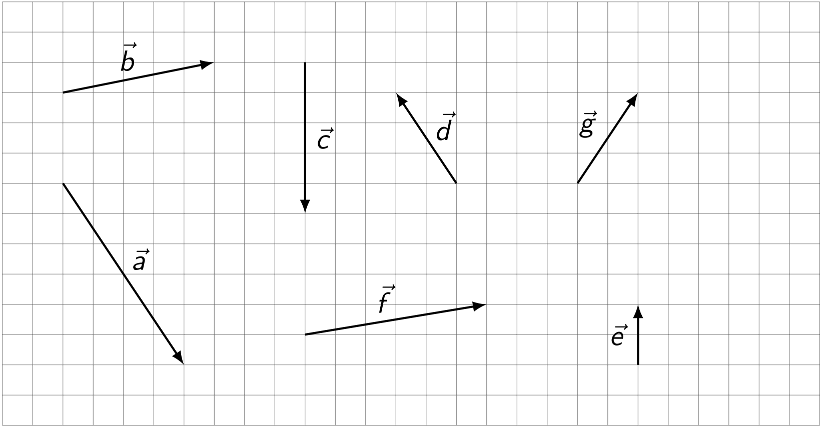
nicht nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ hat.

Aufgabe 2.3

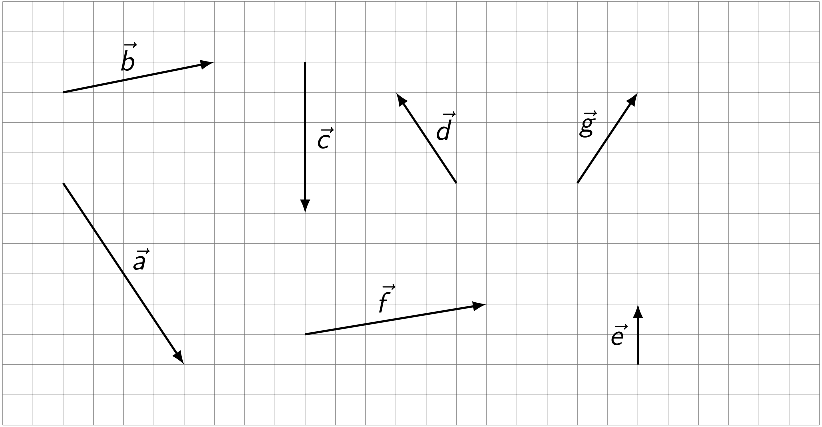
Gib alle Paare von Vektoren an, die kollinear sind.



Aufgabe 2.3



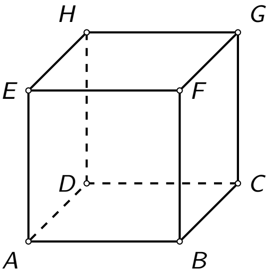
Aufgabe 2.3



- $\vec{a} = -2\vec{d}$ oder $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{a}$
- $\vec{c} = -\frac{5}{2}\vec{e}$ oder $\vec{e} = -\frac{2}{5}\vec{c}$

Aufgabe 2.4

Sind die folgenden Vektoren mit den Endpunkten auf den Ecken des Würfels $ABCDEFGH$ linear abhängig oder linear unabhängig?



(a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GH}$

(b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{BD}$

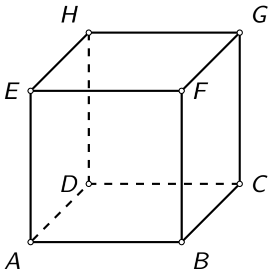
(c) $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$

(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EH}$

(e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$

(f) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GF}$

Aufgabe 2.4



(a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GH}$: linear unabhängig
(b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{BD}$: linear abhängig: $(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BD} = \vec{0})$
(c) $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$: linear unabhängig
(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EH}$: linear unabhängig
(e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$: linear abhängig $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EG} = \vec{0})$
(f) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GF}$: linear abhängig $(\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HB} = \vec{0})$

Aufgabe 3.1

Die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bilden eine Basis des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$.

Gib die Komponentendarstellung der folgenden Vektoren an.

(a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_3$

(b) $\vec{v} = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1$

(c) $-\vec{v}$

(d) $\vec{e}_2$

(e) $\vec{0}$

Aufgabe 3.1

(a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{v} = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Achtung: Reihenfolge)

(c) $-\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.2

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.6 \\ 1.4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$.

Gesucht: Komponentendarstellung der Linearkombinationen

(a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

(b) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{c}$

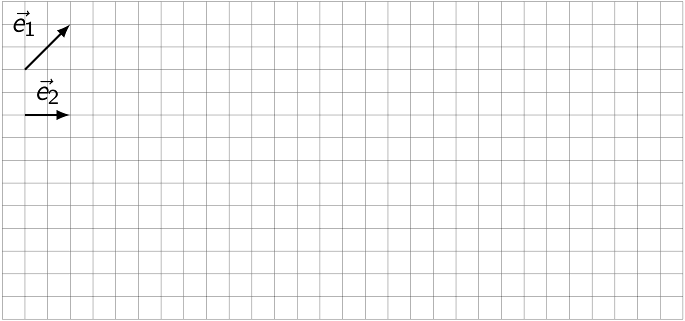
Aufgabe 3.2

(a) $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -18 \end{pmatrix}$

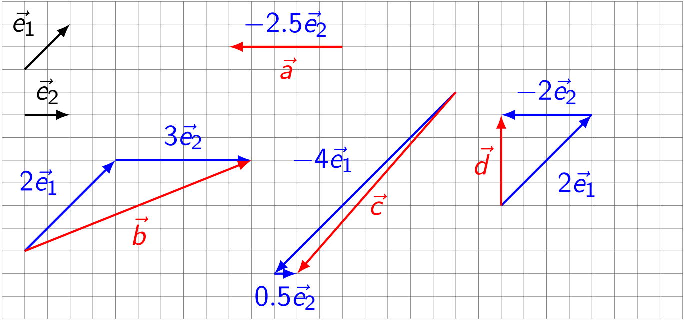
Aufgabe 3.3

Zeichne je einen Repräsentanten der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



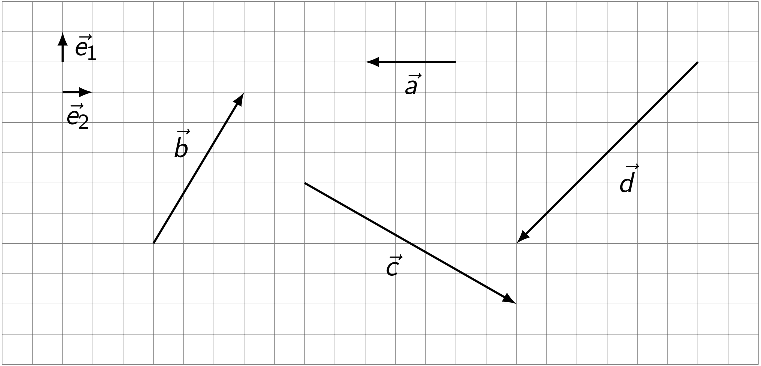
Aufgabe 3.3

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.5 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

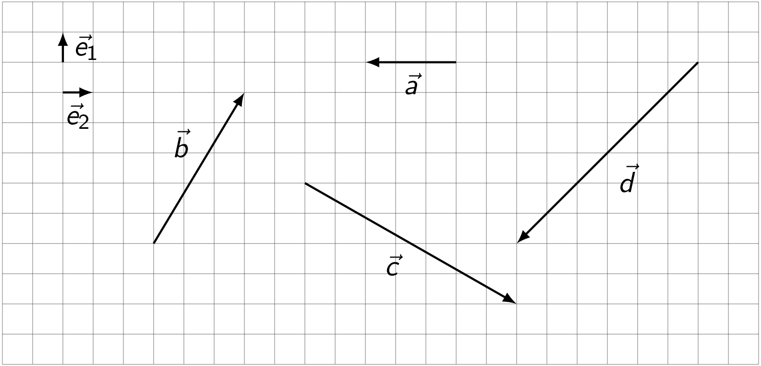


Aufgabe 3.4

Gib die Komponentendarstellungen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ an.



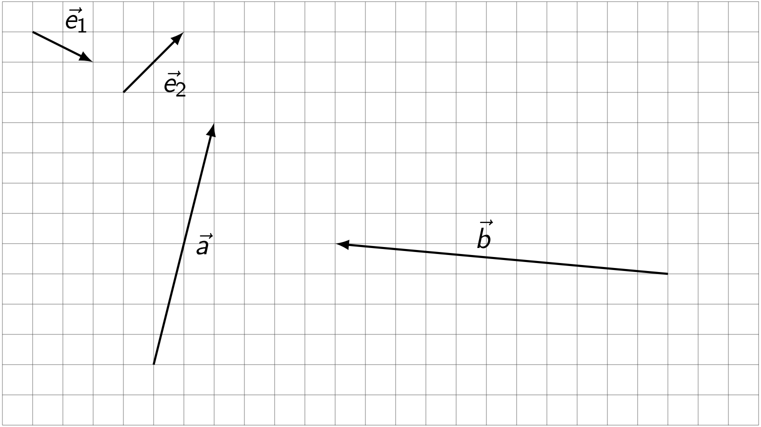
Aufgabe 3.4



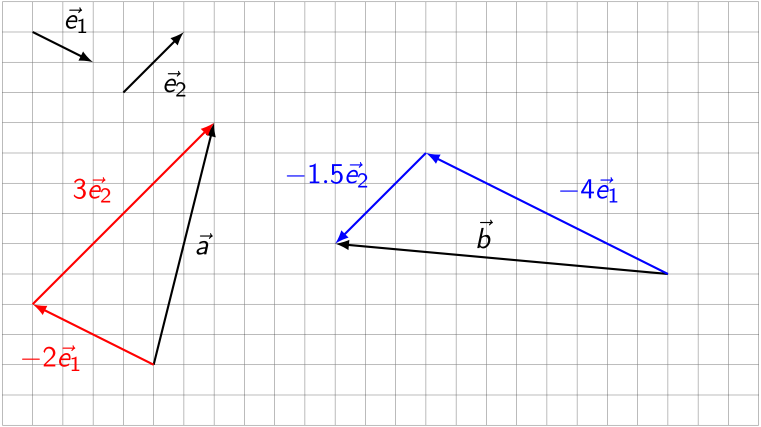
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5

Bestimme konstruktiv die Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



Aufgabe 3.5



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Für welche Komponenten des Vektors $\vec{c}$ bildet $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ eine geschlossene Vektorkette?

Aufgabe 3.6

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Eine Vektorkette (Linearkombination) ist genau dann geschlossen, wenn ihre Summe der Nullvektor ist.

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{c}$$

$$3\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = \tfrac{1}{3}\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.7

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ -18 \\ 45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$ kollinear?

Begründe die Antwort.

Aufgabe 3.7

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ -18 \\ 45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$

Ja, denn $\frac{2}{3}\vec{a} = \vec{b}$ und damit $\frac{2}{3} \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$

Aufgabe 3.8

Untersuche, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3.8

Es ist nicht nötig, das Gleichungsystem

$$4\alpha + \beta + 5\gamma = 0$$
$$3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$$

zu lösen, weil drei Vektoren im zweidimensionalen Raum immer linear abhängig sind.

Aufgabe 3.9

Ist es möglich, den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ darzustellen? Wenn ja, gib die (oder eine) Lösung an.

Aufgabe 3.9

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 5 - 2\gamma \\ \beta &= -1 - \gamma \\ \gamma &= \gamma \end{aligned}$$

wähle $\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5,\ \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 5\vec{a} - \vec{b}$

geometrische Deutung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig und der Vektor $\vec{v}$ liegt in dem von diesen Vektoren gebildeten Raum (hier: Ebene) Somit gibt es undendlich viele Lösungsmöglichkeiten.

Aufgabe 3.10

Ist es möglich, den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ darzustellen? Wenn ja, gib die (oder eine) Lösung an.

Aufgabe 3.10

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

geometrische Deutung: Die drei Vektoren sind parallel zu einer Ebene (komplanar) aber der Vektor $\vec{v}$ nicht. Somit lässt sich $\vec{v}$ nicht durch eine Linearkombination der anderen Vektoren ausdrücken.

Aufgabe 3.11

Ist es möglich, den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

darzustellen? Wenn ja, gib die (oder eine) Lösung an.

Aufgabe 3.11

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -1 \\ \gamma &= 3 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

geometrische Deutung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig; daher lässt sich der Vektor $\vec{v}$ eindeutig durch sie darstellen und es gibt genau eine Lösung.

Aufgabe 3.12

Bestimme die Werte der Parameter x und z, so dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 18 \\ z \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 3.12

Für Kollinearität muss es eine Zahl k mit $\vec{a} = k\vec{b}$ geben:

$$\begin{aligned} 16 &= k \cdot x \\ -24 &= k \cdot 18 \\ -12 &= k \cdot z \end{aligned}$$

Die mittlere Gleichung lässt sich nach k auflösen: $k = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}$

Einsetzen in die erste und letzte Gleichung:

$$x = 16 : k = 16 : \left(-\tfrac{4}{3}\right) = -12$$

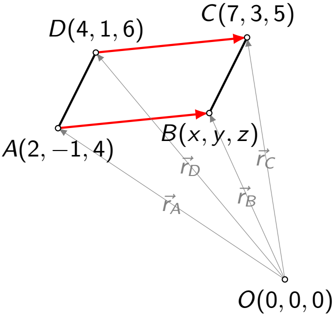
$$z = -12 : k = -12 : \left(-\tfrac{4}{3}\right) = 9$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

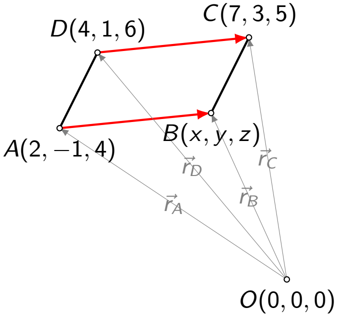
Aufgabe 4.1

Bestimme den Punkt B, so dass $A(2, -1, 4)$, B, $C(7, 3, 5)$ und $D(4, 1, 6)$ in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden.

Aufgabe 4.1

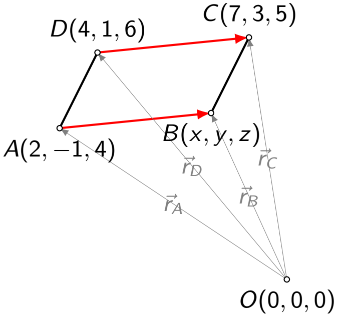


Aufgabe 4.1



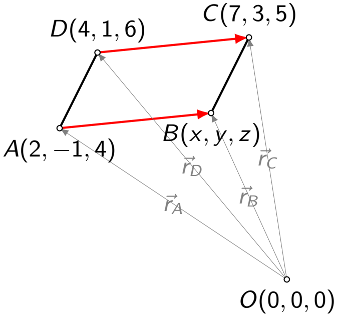
$\vec{r}_B$

Aufgabe 4.1



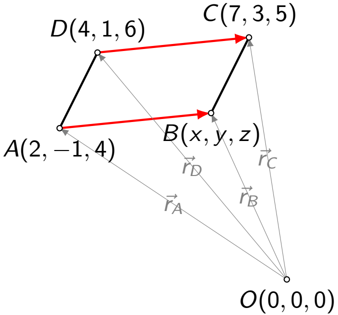
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

Aufgabe 4.1



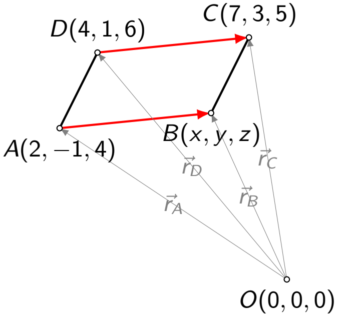
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC}$$

Aufgabe 4.1



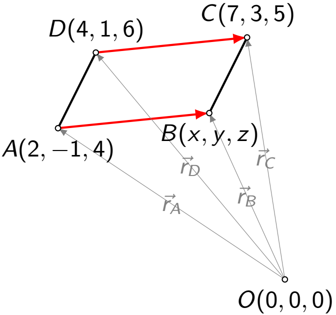
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B(5,1,3)$$

Aufgabe 4.2

Der Punkt $M(-9, 8, 4)$ ist der Mittelpunkt der Strecke mit den Ecken $A(1, 5, -4)$ und B. Bestimme die Koordinaten von B.

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1, 5, -4)$ und Mitte $M(-9, 8, 4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1, 5, -4)$ und Mitte $M(-9, 8, 4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1, 5, -4)$ und Mitte $M(-9, 8, 4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1, 5, -4)$ und Mitte $M(-9, 8, 4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1,5,-4)$ und Mitte $M(-9,8,4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A = 2\begin{pmatrix}-9\\8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1,5,-4)$ und Mitte $M(-9,8,4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A = 2\begin{pmatrix}-9\\8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\11\\12\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $A(1, 5, -4)$ und Mitte $M(-9, 8, 4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A = 2\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B(-19, 11, 12)$$

Aufgabe 4.3

Bestimme den Schwerpunkt S des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$.

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right]$$

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$

$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right]$ (Schwerpunktformel)

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right] \quad \text{(Schwerpunktformel)}$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right] \quad \text{(Schwerpunktformel)}$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7, -3, 9)$, $B(-5, 1, 2)$, $C(0, 6, 3)$ und $D(8, 4, 4)$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right] \quad \text{(Schwerpunktformel)}$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$$

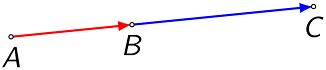
$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 4.5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(2.5, 2, 4.5)$$

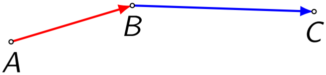
Aufgabe 4.4

Untersuche mit den entsprechenden Rechnungen, ob die Punkte $A(3, 5, -8)$, $B(1, 6, -3)$ und $C(9, 2, -23)$ auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 4.4

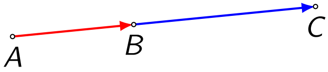
Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).

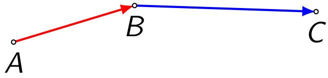




Aufgabe 4.4

Wenn $A(3, 5, -8)$, $B(1, 6, -3)$, $C(9, 2, -23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).





$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

Aufgabe 4.4

Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).

$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{AB}$

Aufgabe 4.4

Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).

$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad \text{mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC}$$

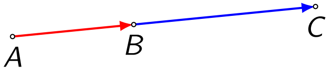
Aufgabe 4.4

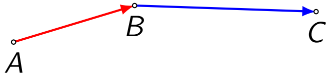
Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).

$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad \text{mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4

Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).



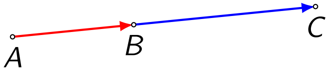


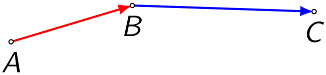
$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad \text{mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2k &= 8 & & & k &= -4 \\ k &= -4 & &\Rightarrow & k &= -4 \\ 5k &= 20 & & & k &= -4 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.4

Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear (linear abhängig); andernfalls sind sie linear unabhängig (rechts).





$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad \text{mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2k &= 8 & & & k &= -4 \\ k &= -4 & &\Rightarrow & k &= -4 \\ 5k &= 20 & & & k &= -4 \end{aligned}$$

Somit sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear und A, B und C liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 4.5

Gegeben: Punkte $A(-7, 1, 3)$ und $B(9, -3, 11)$

Gesucht: Punkt P der die Strecke AB innen im Verhältnis $3 : 5$ teilt.

Aufgabe 4.5

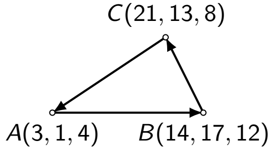
Punkte $A(-7,1,3)$ und $B(9,-3,11)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\
\vec{r}_P - \vec{r}_A &= \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\
\vec{r}_P &= \vec{r}_A + \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\
\vec{r}_P &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{8}\begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(-1,-0.5,6)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.6

Berechne den Umfang des Dreiecks ABC mit $A(3, 1, 4)$, $B(14, 17, 12)$ und $C(21, 13, 8)$.

Aufgabe 4.6



$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{121 + 256 + 64} = \sqrt{441} = 21$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 16 + 16} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \left| \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{324 + 144 + 16} = \sqrt{484} = 22$$

$u = 9 + 21 + 22 = 52$

Aufgabe 4.7

Bestimme alle Vektoren mit der Länge 1, die kollinear zu

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix}$ sind.

Aufgabe 4.7

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{256 + 144 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ -0.48 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.64 \\ 0.48 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.8

Gegeben sind $A(1, y, 5)$ und $B(7, 6, 3)$. Bestimme die fehlende Koordinate von A, so dass die Strecke AB die Länge 11 hat.

Aufgabe 4.8

$$A(1, y, 5),\ B(7, 6, 3)$$

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= 11 \\
\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6-y \\ -2 \end{pmatrix}\right| &= 11 \\
\sqrt{36 + (6-y)^2 + 4} &= 11 \\
\sqrt{40 + (6-y)^2} &= 11 \\
40 + (6-y)^2 &= 121 \\
(6-y)^2 &= 81 \\
6 - y &= \pm 9 \\
y_1 &= -3 \\
y_2 &= 15
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.9

Welche Punkte auf der z-Achse sind von $A(11, 8, -9)$ dreimal so weit entfernt wie von $B(6, -3, 5)$?

Aufgabe 4.9

$A(11, 8, -9)$; $B(6, -3, 5)$; Punkt auf z-Achse: $P(0, 0, z)$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right| = 3 \cdot \left|\overrightarrow{PB}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9 - z \end{pmatrix}\right| = 3 \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 - z \end{pmatrix}\right|$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{121 + 64 + (-9 - z)^2} &= 3 \cdot \sqrt{36 + 9 + (5 - z)^2} \quad ||^2 \\
185 + 81 + 18z + z^2 &= 9 \cdot \left(36 + 9 + 25 - 10z + z^2\right) \\
z^2 + 18z + 266 &= 9z^2 - 90z + 630 \\
0 &= 8z^2 - 108z + 364 \\
z_1 &= 6.5 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 0, 6.5) \\
z_2 &= 7 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, 0, 7)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.10

Beschreibe möglichst genau die besondere Lage der Punkte.

(a) $P(0, 3, 0)$

(b) $Q(-1, 0, 4)$

Aufgabe 4.10

(a) $P(0, 3, 0)$ liegt auf der y-Achse

(b) $Q(-1, 0, 4)$ liegt in der xz-Ebene

Aufgabe 4.11

Spiegle den Punkt $P(4, -7, 3)$ ...

(a) an der xy-Ebene,

(b) an der z-Achse,

(c) am Ursprung,

(d) am Punkt $Z(-1, -6, 1)$.

Aufgabe 4.11

(a) $P(4, -7, 3)$ an der xy-Ebene spiegeln:

Aufgabe 4.11

(a) $P(4,-7,3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4,-7,-3)$

Aufgabe 4.11

(a) $P(4, -7, 3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4, -7, -3)$

(b) $P(4, -7, 3)$ an der z-Achse spiegeln:

Aufgabe 4.11

(a) $P(4,-7,3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4,-7,-3)$

(b) $P(4,-7,3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4,7,3)$

Aufgabe 4.11

(a) $P(4,-7,3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4,-7,-3)$

(b) $P(4,-7,3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4,7,3)$

(c) $P(4,-7,3)$ am Ursprung spiegeln:

Aufgabe 4.11

(a) $P(4, -7, 3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4, -7, -3)$

(b) $P(4, -7, 3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4, 7, 3)$

(c) $P(4, -7, 3)$ am Ursprung spiegeln: $P'(-4, 7, -3)$

Aufgabe 4.11

(a) $P(4, -7, 3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4, -7, -3)$

(b) $P(4, -7, 3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4, 7, 3)$

(c) $P(4, -7, 3)$ am Ursprung spiegeln: $P'(-4, 7, -3)$

(d) $P(4, -7, 3)$ am Punkt $Z(-1, -6, 1)$ spiegeln:

Aufgabe 4.11

(a) $P(4, -7, 3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4, -7, -3)$

(b) $P(4, -7, 3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4, 7, 3)$

(c) $P(4, -7, 3)$ am Ursprung spiegeln: $P'(-4, 7, -3)$

(d) $P(4, -7, 3)$ am Punkt $Z(-1, -6, 1)$ spiegeln: $P'(-6, -5, -1)$