Aufgabe 1

(a) $f\colon y = 3$

Ordinatenabschnitt: $y = 3$

keine Nullstellen ($0 = 3$ hat keine Lösung)

(b) $f\colon y = 5x - 8$

Ordinatenabschnitt: $y = 5 \cdot 0 - 8 = -8$

Nullstellen: $0 = 5x - 8$

$$x = \frac{8}{5}$$

(c) $f\colon y = x^2 + 3x$

Ordinatenabschnitt: $y = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$

Nullstellen:
$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 3x \\ 0 &= x(x+3) \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

(d) $f\colon y = x^2 - 2$

Ordinatenabschnitt: $y = 0^2 - 2 = -2$

Nullstellen:
$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2 \\ x^2 &= 2 \\ x_1 &= \sqrt{2} \\ x_2 &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

(e) $f\colon y = x^2 - 7x + 12$

Ordinatenabschnitt: $y = 0^2 - 7 \cdot 0 + 12 = 12$

Nullstellen:
$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 7x + 12 \\ 0 &= (x-3)(x-4) \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

(f) $f: y = x^3 + 27$

Ordinatenabschnitt: $y = 0^3 + 27 = 27$

Nullstellen: $$\begin{aligned} 0 &= x^3 + 27 \\ x^3 &= -27 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

(g) $f: y = \sqrt{x-4}$

kein Ordinatenabschnitt ($y = \sqrt{-4}$ ist nicht definiert)

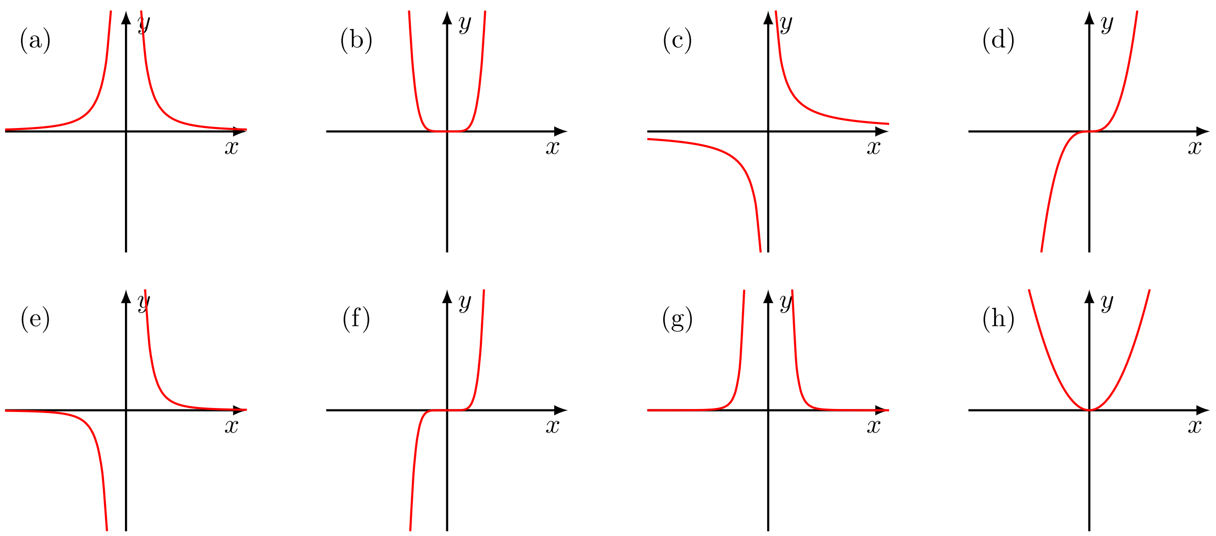
Nullstellen: $$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{x-4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(h) $f: y = \dfrac{x+6}{x-2}$

Ordinatenabschnitt: $y = \dfrac{0+6}{0-2} = \dfrac{6}{-2} = -3$

Nullstellen: $$\begin{aligned} 0 &= \frac{x+6}{x-2} \quad || \cdot (x-2) \\ 0 &= x+6 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 2



(h) $y = x^2$ (d) $y = x^3$ (c) $y = x^{-1}$ (e) $y = x^{-3}$

(b) $y = x^6$ (f) $y = x^7$ (a) $y = x^{-2}$ (g) $y = x^{-6}$

Aufgabe 3

$P(1, 1)$

Aufgabe 4

(a) $f\colon y = x^{-3}$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) $f(x) = x^4$: $D = \mathbb{R}$, $W = [0, \infty)$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$: $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

alternative Schreibweisen:

- $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$
- $[0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$
- $(-\infty, 0) = \mathbb{R}^-$
- $(-\infty, 0] = \mathbb{R}_0^-$

Somit wäre $\mathbb{R} \setminus \{0\} = R^- \cup R^+$

Aufgabe 5

(a) $f\colon y = x^8$

$f(-x) = (-x)^8 = x^8 = f(x) \quad$ für alle $x \in D$

ordinatensymmetrisch

(b) $f\colon y = 2x^3 - 5x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x \\ &= -(2x^3 - 5x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D \end{aligned}$$

ursprungsymmetrisch

(c) $f\colon y = |x| + 3$

$f(-x) = |-x| + 3 = |x| + 3 = f(x) \quad$ für alle $x \in D$

ordinatensymmetrisch

(d) $f\colon y = x^2 + 4x + 1$

$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 1 = x^2 - 4x + 1 = -(x^2 + 4x - 1)$

weder ordinaten- noch ursprungsymmetrisch

(e) $f\colon y = 4x^{-5} + 7x^{-3}$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^{-5} + 7(-x)^{-3} = -4x^{-5} - 7x^{-3} \\ &= -\big(4x^{-5} + 7x^{-3}\big) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D \end{aligned}$$

ursprungsymmetrisch

Aufgabe 6

(a) $f\colon y = x^2$; $I = [-4, -2]$: monoton fallend

(b) $f\colon y = x^4$; $I = [-2, 2]$: nicht monoton

(c) $f\colon y = x^3$; $I = [-2, 2]$: monoton wachsend

(d) $f\colon y = -x + 3$; $I = [1, \infty)$: monoton fallend

(e) $f\colon y = x^{-1}$; $I = [-2, 0)$: monoton fallend

(f) $f\colon y = x^{-2}$; $I = [-2, 0)$: monoton wachsend

Aufgabe 7

$M = \left\{(x, y)\colon \frac{3}{2}x - 2 \leq y \ \wedge \ y \leq -\frac{1}{2}x + 2\right\}$

$f\colon y = \frac{3}{2}x - 2$; $g\colon y = -\frac{1}{2}x + 2$

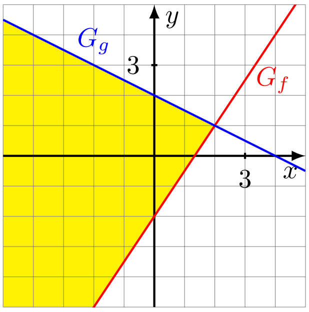
Das Gebiet lässt sich beispielsweise durch Testpunkte ermitteln:

$(0, 0)$: $-2 \leq 0 \wedge 0 \leq 2$ (wahr)

$(2, 0)$: $1 \leq 0 \wedge 0 \leq 1$ (falsch)

$(4, 1)$: $4 \leq 1 \wedge 1 \leq 0$ (falsch)

$(2, 2)$: $1 \leq 2 \wedge 2 \leq 1$ (falsch)

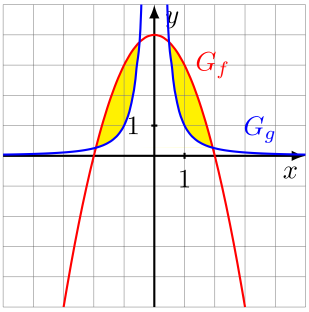


Aufgabe 8

$M = \left\{(x, y) \colon y \leq 4 - x^2 \;\; \wedge \;\; y \geq x^{-2}\right\}$

$f \colon y = 4 - x^2$; $g \colon y = x^{-2}$

Das Gebiet muss *unter* G_f aber *über* G_g liegen.



Aufgabe 9

$f \colon y = x^2 + 2x - 3$

$y \to y - 2$

$y - 2 = x^2 + 2x - 3$

$f_t \colon y = x^2 + 2x - 1$

Aufgabe 10

$f \colon y = x^2 + 1$

$x \to x - 1$

$y = \sqrt{(x-1)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$f_t \colon y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Aufgabe 11

$f \colon y = \dfrac{x+1}{x+3}$

$y \to \dfrac{1}{2} y$

$\dfrac{1}{2} y = \dfrac{x+1}{x+3}$

$f_t \colon y = \dfrac{2x+2}{x+3}$

Aufgabe 12

$f \colon y = x^{-2}$

$x \to \frac{3}{2}x$

$y = \left(\frac{3}{2}x\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} x^{-2} = \frac{9}{4}x^{-2}$

$f_t\colon y = \frac{9}{4}x^{-2}$

Aufgabe 13

$f\colon y = x^2 + x + 1$

$x \to -x$

$y = (-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1$

$f_t\colon y = x^2 - x + 1$

Aufgabe 14

$f\colon y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Am Ursprung spiegeln bedeutet Spiegelung an der x- *und* der y-Achse:

$x \to -x$

$y \to -y$

$$-y = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2+1} \quad || \cdot (-1)$$

$f_t\colon y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Der Graph von f ist offenbar ursprungssysmmetrisch.

Aufgabe 15

(a) $f\colon y = \sqrt{x}$

Transformieren:

- $y \to \frac{1}{2}y$: $\frac{1}{2}y = \sqrt{x}$
- $x \to x+1$: $\frac{1}{2}y = \sqrt{x+1}$
- $x \to -x$: $\frac{1}{2}y = \sqrt{-x+1}$

Vereinfachen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y &= \sqrt{-x+1} \quad || \cdot 2 \\ y &= 2\sqrt{-x+1} \end{aligned}$$

$f_t\colon y = 2\sqrt{-x+1}$

(b) $f: y = \sqrt{x}$

Transformieren:

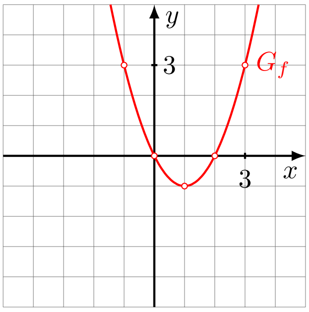
- $x \to -x$: $y = \sqrt{-x}$
- $x \to x+1$: $y = \sqrt{-(x+1)}$
- $y \to \frac{1}{2}y$: $\frac{1}{2}y = \sqrt{-(x+1)}$

Vereinfachen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y &= \sqrt{-(x+1)} \\ \tfrac{1}{2}y &= \sqrt{-x-1} \quad || \cdot 2 \\ y &= 2\sqrt{-x-1} \end{aligned}$$

$f_t: y = 2\sqrt{-x-1}$

Aufgabe 16

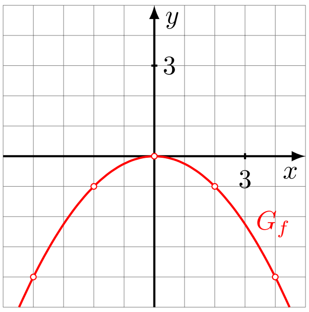


Die Normalparabel $y = x^2$ wurde ...

- um 1 Einheit nach rechts verschoben: $x \to x - 1$ und
- um 1 Einheit nach unten verschoben: $y \to y + 1$.

$$
\begin{aligned}
y + 1 &= (x-1)^2 \\
y + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\
y &= x^2 - 2x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 17



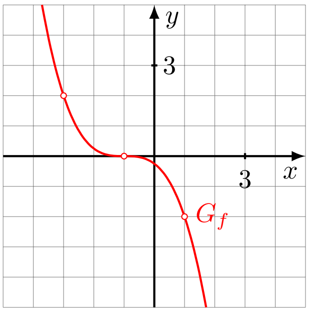
Die Normalparabel $y = x^2$ wurde ...

- an der x-Achse gespiegelt: $y \to -y$ und ...
- mit dem Faktor 2 horizontal gestreckt: $x \to \frac{1}{2}x$.

  oder: mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ vertikal gestaucht: $y \to 4y$

$$
\begin{aligned}
-y &= \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 \\
-y &= \tfrac{1}{4}x^2 \\
y &= -\tfrac{1}{4}x^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 18

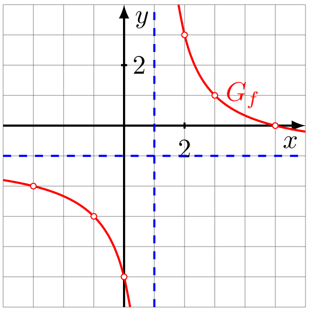


Die Normalparabel $y = x^3$ wurde ...

- an der x-Achse gespiegelt: $y \to -y$,
- mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ vertikal gestaucht: $y \to 4y$,
- um 1 Einheit nach links verschoben: $x \to x + 1$

$$\begin{aligned} -4y &= (x+1)^3 \\ -4y &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ y &= -\tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 19



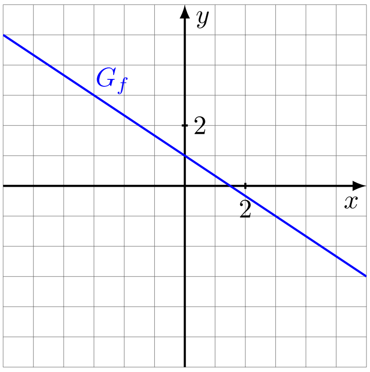
Die Hyperbel $y = 1/x$ wurde ...

- mit dem Faktor 2 horizontal gestreckt: $x \to \frac{1}{2}x$,
- mit dem Faktor 2 vertikal gestreckt: $y \to \frac{1}{2}y$,
- um 1 Einheit nach rechts verschoben: $x \to x - 1$,
- um 1 Einheit nach unten verschoben: $y \to y + 1$,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(y+1) &= \frac{1}{\frac{1}{2}(x-1)} \qquad [1 : \tfrac{1}{2} = 2] \\ \tfrac{1}{2}(y+1) &= \frac{2}{x-1} \quad || \cdot 2 \\ y + 1 &= \frac{4}{x-1} \quad || - 1 \\ y &= \frac{4}{x-1} - 1 \end{aligned}$$

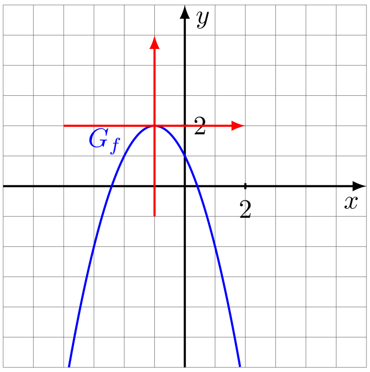
Aufgabe 20

$f\colon y = -\frac{2}{3}x + 1$



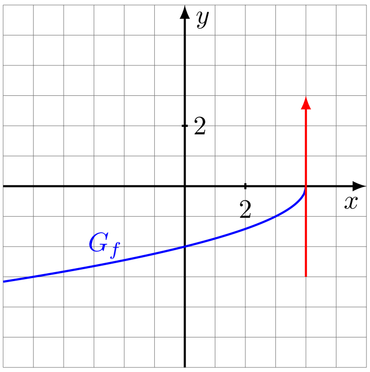
Aufgabe 21

$f\colon y = -(x+1)^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad -(y-2) = (x+1)^2$



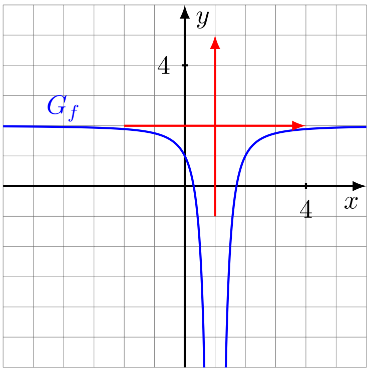
Aufgabe 22

$f\colon y = -\sqrt{-x+4} \quad \Leftrightarrow \quad -y = \sqrt{-(x-4)}$



Aufgabe 23

$f\colon y = -(x-1)^{-2} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad -(y-2) = (x-1)^{-2}$



Aufgabe 24

Setze $x = \frac{9}{4}$ und $y = \frac{8}{27}$ in $y = x^a$ ein:

$$\begin{aligned}
\frac{8}{27} &= \left(\frac{9}{4}\right)^a \\
\frac{2^3}{3^3} &= \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^a \\
\left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2a} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2a} \\
-3 &= 2a \\
a &= -1.5
\end{aligned}$$

Aufgabe 25

Setze $x = -2$ und $y = 3$ in $y = a^x$ ein:

$$\begin{aligned}
3 &= a^{-2} \\
(\sqrt{3})^2 &= a^{-2} \\
\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2} &= a^{-2} \\
a &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 26

Setze $x = 2$ und $y = -4$ in $y = ax^b$ ein: $-4 \overset{(1)}{=} a \cdot 2^b$

Setze $x = -4$ und $y = 32$ in $y = ax^b$ ein: $32 \overset{(2)}{=} a \cdot (-4)^b$

Dividiere (2) durch (1): $\dfrac{32}{-4} = \dfrac{(-4)^b}{2^b} = \left(\dfrac{-4}{2}\right)^b$

$$-8 = (-2)^b$$

$$b = 3$$

Setze $b = 3$ in (1) ein:

$-4 = a \cdot 2^3$
$-4 = 8a$
$a = \frac{1}{2}$

Aufgabe 27

Setze $x = -2$ und $y = 32$ in $y = ax^b$ ein: $32 \overset{(1)}{=} a \cdot b^{-2}$

Setze $x = 3$ und $y = 1$ in $y = ax^b$ ein: $1 \overset{(2)}{=} a \cdot b^3$

Dividiere (1) durch (2): $\dfrac{32}{1} = \dfrac{a \cdot b^{-2}}{a \cdot b^3}$

$$32 = b^{-5}$$

$$b = \tfrac{1}{2}$$

Setze $b = \frac{1}{2}$ in (2) ein: $1 = a\left(\frac{1}{2}\right)^3$
$1 = \frac{1}{8}a$
$a = 8$