

Aufgabe 1

$$\sqrt[4]{256} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$$

Aufgabe 2

$$\sqrt[5]{243} = (3^5)^{\frac{1}{5}} = 3^1 = 3$$

Aufgabe 3

$$\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{2^3}} = \frac{5}{2}$$

Aufgabe 4

$$\sqrt[4]{0.0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10\,000}} = \sqrt[4]{\frac{1^4}{10^4}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Aufgabe 5

$$\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{10^3}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} [= 0.2]$$

Aufgabe 6

$$\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Aufgabe 7

$$n < \sqrt[4]{500} < (n+1)$$

$$n^4 < 500 < (n+1)^4$$

$$4^4 = 256 < 500 < 625 = 5^4$$

$\sqrt[4]{500}$ liegt zwischen 4 und 5

Aufgabe 8

$$27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

Aufgabe 9

$$10\,000^{\frac{1}{4}} = (10^4)^{\frac{1}{4}} = 10$$

Aufgabe 10

$$(1^5)^{\frac{1}{5}} = 1$$

Aufgabe 11

$$64^{-\frac{1}{3}} = (4^3)^{-\frac{1}{3}} = 4^{3 \cdot (-\frac{1}{3})} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 12

$$32^{0.2} = (2^5)^{0.2} = 2^1 = 2$$

Aufgabe 13

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 14

$$125^{\frac{4}{3}} = (5^3)^{\frac{4}{3}} = 5^4 = 625$$

Aufgabe 15

$$16^{-0.75} = (2^4)^{-0.75} = 2^{4 \cdot (-0.75)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Aufgabe 16

$$\sqrt[7]{1000} = 1000^{\frac{1}{7}} = (10^3)^{\frac{1}{7}} = 10^{3 \cdot \frac{1}{7}} = 10^{\frac{3}{7}}$$

Aufgabe 17

$$\sqrt[5]{0.5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = (2^{-1})^{\frac{1}{5}} = 2^{(-1) \cdot \frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Aufgabe 18

Um die die Zahlen besser vergleichen zu können, sind sie als rationale Zahlen darzustellen.

$$a = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$b = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

$$c = 625^{-0.75} = (5^4)^{-0.75} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$d = 144^{-1.5} = (12^2)^{-1.5} = 12^{-3} = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{144 \cdot 12} < \frac{1}{1024}$$

Also: $d < b < a < c$

Aufgabe 19

$$7 \cdot 7^{0.2} = 7^1 \cdot 7^{0.2} = 7^{1+0.2} = 7^{1.2}$$

Aufgabe 20

$$7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^3 = 7^{-\frac{1}{2}+3} = 7^{2.5}$$

Aufgabe 21

$$\sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = 2^{\frac{2}{10}} = 2^{\frac{1}{5}}$$

Aufgabe 22

$$5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}} = 5^{\frac{6}{36} - \frac{4}{36}} = 5^{\frac{2}{36}} = 5^{\frac{1}{18}}$$

Aufgabe 23

$$\sqrt[5]{2} : \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{5}} : 2^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} = 2^{\frac{2}{10} - \frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{10}}$$

Aufgabe 24

$$10 : 10^{-1.5} = 10^1 : 10^{-1.5} = 10^{1 - (-1.5)} = 10^{2.5}$$

Aufgabe 25

$$(\sqrt[4]{2})^{10} = (2^{\frac{1}{4}})^{10} = 2^{\frac{1}{4} \cdot 10} = 2^{\frac{5}{2}}$$

Aufgabe 26

$$\sqrt{\sqrt[5]{10}} = \sqrt{10^{\frac{1}{5}}} = (10^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{10}}$$

Aufgabe 27

$$5^{-0.5} \cdot 20^{-0.5} = (5 \cdot 20)^{-0.5} = 100^{-0.5} = (10^2)^{-0.5} = 10^{2 \cdot (-0.5)} = 10^{-1} [= 0.1]$$

Aufgabe 28

$$1.6^{0.5} \cdot 40^{0.5} = (1.6 \cdot 40)^{0.5} = 64^{0.5} = (8^2)^{0.5} = 8$$

Aufgabe 29

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3} = 3^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 30

$$1.5^{10} : \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = 1.5^{10} : 1.5^{10} = 1$$

Aufgabe 31

$$7^{-0.5} : 700^{-0.5} = (7 : 700)^{-0.5} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-0.5} = \left(\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)^{-0.5} = \left(\frac{1}{10}\right)^{2 \cdot (-0.5)} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$$

Aufgabe 32

$$(10^{-0.5} : 10^2) : 10^{-1.5} = 10^{-0.5-2-(-1.5)} = 10^{-1} = 0.1$$

Aufgabe 33

$$a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right) = a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot a^1 = a^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + 1} = a^{\frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{12}{12}} = a^{\frac{13}{12}}$$

Aufgabe 34

$$\pi \cdot \pi^2 \cdot \pi^{-0.5} = \pi^{1+2+(-0.5)} = \pi^{2.5}$$

Aufgabe 35

$$32^{12} : 2^{15} = (2^5)^{12} : 2^{15} = 2^{60} : 2^{15} = 2^{60-15} = 2^{45}$$

Aufgabe 36

$$11 \cdot 2^7 + 21 \cdot 2^7 = 2^7(11 + 21) = 32 \cdot 2^7 = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$$

Aufgabe 37

$$\begin{aligned}16^{\frac{1}{4}} + 8^{\frac{4}{3}} + 36^{\frac{3}{2}} - 125^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{4}{3}} &= (2^4)^{\frac{1}{4}} + (2^3)^{\frac{4}{3}} + (6^2)^{\frac{3}{2}} - (5^3)^{\frac{2}{3}} - (2^3)^{\frac{4}{3}} \\ &= 2 + 16 + 216 - 25 - 81 = 128\end{aligned}$$

Aufgabe 38

$$\begin{aligned}(3 \cdot 2^{0.25} + 2 \cdot 32^{0.25} - 8^{0.75}) \cdot 8^{0.25} \\ &= (3 \cdot 2^{0.25} + 2 \cdot 2^{1.25} - 2^{2.25}) \cdot 2^{0.75} \\ &= 3 \cdot 2^{0.25} \cdot 2^{0.75} + 2 \cdot 2^{1.25} \cdot 2^{0.75} - 2^{2.25} \cdot 2^{0.75} \\ &= 3 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 - 2^3 \\ &= 6 + 8 - 8 \\ &= 6\end{aligned}$$

Aufgabe 39

$$\begin{aligned}(24^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 81^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 192^{\frac{1}{3}}) : 3^{\frac{1}{3}} &= 24^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 81^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 192^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 8^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 27^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 64^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 2 + 6 - 12 = -4\end{aligned}$$

Aufgabe 40

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3}}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2} = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$$

Aufgabe 41

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= \sqrt{2\sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{2^1 \cdot \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{2^1 \cdot (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{4}}} = (2^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

Aufgabe 42

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{6}}$$

Aufgabe 43

$$9^{1.5} = (3^2)^{1.5} = 3^3 = 27 \in \mathbb{N} \quad (\text{wahr})$$

Aufgabe 44

$$0.5^{0.5} > 0.5 \Rightarrow (0.5^{0.5})^2 > 0.5^2 \Rightarrow 0.5 > 0.5^2 \Rightarrow 0.5 > 0.25 \quad \text{wahr}$$

Aufgabe 45

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad \text{falsch}$$

Aufgabe 46

$$\left(2 + \frac{2}{3}\right)^{0.5} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5} \quad ||^2$$

$$\left[\left(2 + \frac{2}{3}\right)^{0.5}\right]^2 = \left[2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5}\right]^2$$

$$2 + \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{wahr}$$

Aufgabe 47

Beide Zahlen sind mit $6 = \text{kgV}(2, 3)$ zu potenzieren, damit aus den gebrochenen Exponenten ganzzahlige Exponenten werden:

$$a^6 = (3^{\frac{1}{2}})^6 = 3^3 = 27 \quad b^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^2 = 25$$

Da das Potenzieren von zwei Basen mit demselben Exponenten die Größenbeziehungen erhält, ist $b < a$.

Aufgabe 48

$$\begin{array}{r} a \quad \boxed{?} \quad b \\ 2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} \quad \boxed{?} \quad 5^{\frac{1}{3}} \quad ||^3 \\ (2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}})^3 \quad \boxed{?} \quad 5 \\ (2 + \underbrace{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}_{>0} + 3) \quad \boxed{?} \quad 5 \end{array}$$

Also ist $a > b$.

Aufgabe 49

$$8^x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^{3x} = 2^1 \quad \Rightarrow \quad 3x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 50

$$x^{1.5} = 1000 \quad \Rightarrow \quad (x^{1.5})^2 = 1000^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 10^6 \quad \Rightarrow \quad x = 100$$

Aufgabe 51

$$4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 52

$$8^x = 4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 53

$$9^x = 1 \Rightarrow 9^x = 9^0 \Rightarrow x = 0$$

Aufgabe 54

$$2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 2^x = 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 55

$$9^{50} = 27^x \Rightarrow 3^{100} = 3^{3x} \Rightarrow 100 = 3x \Rightarrow x = \frac{100}{3}$$

Aufgabe 56

$$2^{-4x} = 2^{10} \Rightarrow -4x = 10 \Rightarrow x = -2.5$$

Aufgabe 57

$$x^3 = -64 \Rightarrow x^3 = (-4)^3 \Rightarrow x = -4$$

Aufgabe 58

$$x^{3.5} = 10\,000\,000 \Rightarrow x^{3.5} = 10^7 = 100^{3.5} \Rightarrow x = 100$$

Aufgabe 69

$$x^4 = 10^{-4} \Rightarrow x^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{10}$$

Aufgabe 60

$x^6 = -729$ unlösbar, da Potenzen mit geraden Exponenten nie negativ werden können

Aufgabe 61

$$x^{-6} = 729 \Rightarrow x^{-6} = 3^6 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^6 = 3^6 \Rightarrow \frac{1}{x} = \pm 3 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

Aufgabe 62

$$3^{4x} = 9^{x+5} \Rightarrow 3^{4x} = 3^{2x+10} \Rightarrow 4x = 2x + 10 \Rightarrow x = 5$$

Aufgabe 63

$$10^{5x-2.5} = 10^{4x-1} \Rightarrow 5x - 2.5 = 4x - 1 \Rightarrow x = 1.5$$

Aufgabe 64

$$0.1^x = 1000 \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^3 \Rightarrow 10^{-x} = 10^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

Aufgabe 65

$$x^{0.1} = 1000 \Rightarrow x^{0.1} = 10^3 \Rightarrow (x^{0.1})^{10} = (10^3)^{10} \Rightarrow x^1 = x = 10^{30}$$

Aufgabe 66

$$5^{2x} - 0.0016 = 0 \Rightarrow 5^{2x} = \frac{16}{10000} \Rightarrow 5^{2x} = \frac{2^4}{10^4} \Rightarrow 5^{2x} = \left(\frac{2}{10}\right)^4$$

$$5^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow 5^{2x} = 5^{-4} \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

Aufgabe 67

$$4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x \Rightarrow 2^2 \cdot 2^x \cdot 2^5 = 2^{2x} \Rightarrow 2^{x+7} = 2^{2x} \Rightarrow x + 7 = 2x \Rightarrow x = 7$$

Aufgabe 68

$$4 \cdot 2^x + 32 = 4^x \Rightarrow 4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2$$

Substituiere $2^x = u$:

$$4 \cdot u + 32 = u^2 \Rightarrow u^2 - 4u - 32 = 0 \Rightarrow (u + 4)(u - 8) = 0$$

$$u_1 = -4 = 2^x \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$u_2 = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3$$

Aufgabe 69

$$3^x + 729 \cdot (3^x)^{-1} = 90 \quad \text{Substituiere } 3^x = a:$$

$$a + 729 \cdot \frac{1}{a} = 90 \Rightarrow a^2 - 90a + 729 = 0 \Rightarrow (a - 81)(a - 9) = 0 \Rightarrow a_1 = 81, a_2 = 9$$

Substitution rückgängig machen:

$$a_1 = 81 = 3^4 = 3^x \Rightarrow x_1 = 4$$

$$a_2 = 9 = 3^2 = 3^x \Rightarrow x_2 = 2$$