Algorithmen

Maturavorbereitung

Aufgabe 1

Beschreibe kurz und präzise (aber ohne mathematische Strenge), was ein Algorithmus ist.

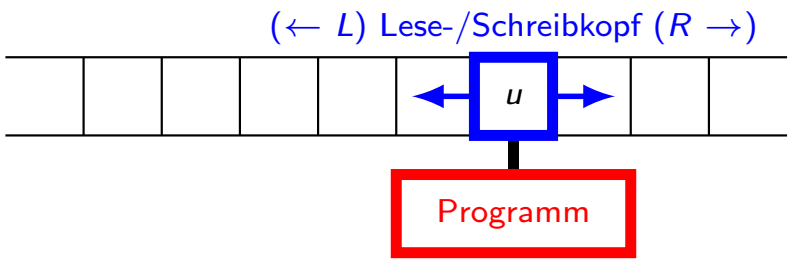
Aufgabe 1

Ein Algorithmus ist eine Vorschrift zur Lösung eines Problems, die *endlich*, *deterministisch* (eindeutig) und *effektiv* (ausführbar) ist.

Wer es genau wissen will: Ein Algorithmus ist eine Berechnungsvorschrift zur Lösung eines Problems, wenn eine zu dieser Berechnungsvorschrift äquivalente Turingmaschine existiert, die für jede Eingabe, die eine Lösung hat, stoppt

Eine Turingmaschine (TM) ist ein 7-Tupel $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ mit:

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Eingabealphabet
- Γ: endliches Bandalphabet
- $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ die Übergangsfunktion
- $q_0 \in Q$: Anfangszustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$: das leere Feld
- $F \subset Q$: Menge der akzeptierenden Zustände



Die TM liest das Zeichen über dem Lesekopf, geht abhängig vom aktuellen Zustand q und dem gelesenen Zeichen $u \in \Gamma$ in den Zustand q', schreibt je nach Programm ein Zeichen aufs Band und verschiebt den Lese-/Schreibkopf um eine Position nach links (L), rechts (R) oder bleibt stehen (N). Die TM stoppt, wenn ein akzeptierender Zustand erreicht wird.

Aufgabe 2

Beschreibe möglichst konkret den Begriff der Laufzeitkomplexität eines Algorithmus und gib wichtige Laufzeitklassen in der Big-Oh-Notation an.

Aufgabe 2

Die Laufzeitkomplexität beschreibt, wie sich die Laufzeit eines Algorithmus mit zunehme der Grösse der Eingabedaten verändert. Die „Big-Oh“-Notation gibt eine obere Schranke für das Wachstum der Laufzeit an.

- $O(1)$ (konstante Laufzeit): Lese- oder Scheibzugriff auf ein Array, Wertzuweisung einer Variablen, Addition von ganzen Zahlen
- $O(\log n)$ (logarithmische Laufzeit): Binäre Suche in einem sortierten Array
- $O(n)$ (lineare Laufzeit): Sequentielle Suche in einem unsortierten Array
- $O(n \log n)$ (linear-logarithmische Laufzeit): Effizienten Sortieralgorithmen wie Quick- oder Mergesort
- $O(n^2)$ (quadratische Laufzeit): „Naive“ Sortieralgorithmen wie Insertionsort, Selectionsort oder Gnomesort
- $O(n^3)$ (kubische Laufzeit): Die Multiplikation von $(n \times n)$-Matrizen.
- $O(2^n)$ (exponentielle Laufzeit): Erzeugen aller Binärzahlen mit n Stellen.

Aufgabe 3

Welche Arten von Algorithmen sind für grosse Problemgrössen nicht mehr handhabbar?

Aufgabe 3

Algorithmen mit exponentiellen (und höheren) Laufzeiten.

Aufgabe 4

In welcher (minimalen) Laufzeitklasse liegt ein Algorithmus mit der Laufzeit $T(n)$, wenn n die Problemgrösse bezeichnet?

(a) $T(n) = 3n + 4n^2 + 2$

(b) $T(n) = (3n + 2)(5n^2 + 1)$

(c) $T(n) = 2^{n+3}$

(d) $T(n) = \log_2(4n^3)$

Aufgabe 4

(a) $T(n) = 3n + 4n^2 + 2 \in O(n^2)$

(b) $T(n) = (3n + 2)(5n^2 + 1) \in O(n^3)$

(c) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in O(2^n)$

(d) $T(n) = \log_2(4n^3) = \log_2(4) + 3\log_2(n) \in \log_2(n)$

Aufgabe 5

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ und benötigt etwa 20s für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 100$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 200$.

Aufgabe 5

$$T(n) = C \cdot n^2$$

Aufgabe 5

$$T(n) = C \cdot n^2$$

$$T(100) = C \cdot 100^2 = 20\text{s} \ (*)$$

Aufgabe 5

$$T(n) = C \cdot n^2$$

$$T(100) = C \cdot 100^2 = 20\text{s} \ (*)$$

$$T(200) = C \cdot 200^2 = C \cdot (2 \cdot 100)^2 = 2^2 \cdot C \cdot 100^2 = 4 \cdot 20\text{s} = 80\text{s}$$

Aufgabe 5

$$T(n) = C \cdot n^2$$

$$T(100) = C \cdot 100^2 = 20\text{s} \ (*)$$

$$T(200) = C \cdot 200^2 = C \cdot (2 \cdot 100)^2 = 2^2 \cdot C \cdot 100^2 = 4 \cdot 20\text{s} = 80\text{s}$$

Allgemein: In $O(n^2)$ bewirkt das Verdoppeln der Problemgrösse eine Vervierfachung der Laufzeit.

Aufgabe 5

$$T(n) = C \cdot n^2$$

$$T(100) = C \cdot 100^2 = 20\text{s} \ (*)$$

$$T(200) = C \cdot 200^2 = C \cdot (2 \cdot 100)^2 = 2^2 \cdot C \cdot 100^2 = 4 \cdot 20\text{s} = 80\text{s}$$

Allgemein: In $O(n^2)$ bewirkt das Verdoppeln der Problemgrösse eine Vervierfachung der Laufzeit.

Man hätte auch die erste Gleichung nach C auflösen und diesen Wert in die zweite Gleichung einsetzen können. Meist lässt sich die Rechung jedoch in der oben beschriebenen Weise „kurzschliessen“.

Aufgabe 6

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(2^n)$ und benötigt etwa 3 s für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 10$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 12$.

Aufgabe 6

$$T(n) = C \cdot 2^n$$

$$T(10) = C \cdot 2^{10} = 3\,\mathrm{s}$$

$$T(12) = C \cdot 2^{12} = C \cdot 2^{10} \cdot 2^2 = 3\,\mathrm{s} \cdot 4 = 12\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 7

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(\log_2(n))$ und benötigt etwa 3 ms für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 100$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 10\,000$.

Aufgabe 7

$$T(n) = C \cdot \log_2(n)$$

Aufgabe 7

$$T(n) = C \cdot \log_2(n)$$

$$T(100) = C \cdot \log_2(100) = 3\,\text{ms}$$

Aufgabe 7

$$T(n) = C \cdot \log_2(n)$$

$$T(100) = C \cdot \log_2(100) = 3\,\text{ms}$$

$$T(10\,000) = C \cdot \log_2(10\,000) = C \cdot \log_2(100^2) = 2 \cdot C \cdot \log_2(100) = 2 \cdot 3\,\text{ms} = 6\,\text{ms}$$

Aufgabe 8

Analysiere die Laufzeitkomplexität der folgenden Python-Funktion in Abhängigkeit der Problemgrösse n.

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3      for i in range(0, n):
4          s = s + i
5      return s
```

Aufgabe 8

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3      for i in range(0, n):
4          s = s + i
5      return s
```

Der Aufruf der Funktion, die Zuweisung `s=0` und die Rückgabe des Wertes benötigen jeweils konstante Zeit. Die Ausführungsdauer der Schleife ist proportional zu n.

Somit $T(n) = c_1 + c_2 \cdot n \in O(n)$

Aufgabe 9

Analysiere die Laufzeitkomplexität der folgenden Python-Funktion in Abhängigkeit der Problemgrösse n.

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3      for i in range(0, n):
4          for j in range(0, n):
5              s = s + i*j
6      return s
```

Aufgabe 9

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3      for i in range(0, n):
4          for j in range(0, n):
5              s = s + i*j
6      return s
```

Der Aufruf der Funktion, die Zuweisung s=0 und die Rückgabe des Wertes benötigen jeweils konstante Zeit. Da für jede der n Iterationen der äusseren Schleife n Iterationen der inneren Schleife ausgeführt werden, hat der Schleifenkomplex eine Ausführungsdauer, die proportional zu n^2 ist.

Somit: $T(n) = c_1 + c_2 \cdot n^2 \in O(n^2)$

Aufgabe 10

Analysiere die Laufzeitkomplexität der folgenden Python-Funktion in Abhängigkeit der Problemgrösse n.

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3      for i in range(0, n):
4          s = s + i
5      for j in range(0, n):
6          s = s + j
7      return s
```

Aufgabe 10

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3      for i in range(0, n):
4          s = s + i
5      for j in range(0, n):
6          s = s + j
7      return s
```

Der Aufruf der Funktion, die Zuweisung `s=0` und die Rückgabe des Wertes benötigen jeweils konstante Zeit. Da für jede der n Iterationen der ersten Schleife n Iterationen ausgeführt werden und danach nochmals n Iterationen der zweitenausgeführt werden, hat der Schleifenblock eine Ausführungsdauer, die proportional zu n ist.

Somit: $T(n) = c_1 + c_2 \cdot n \in O(n)$

Aufgabe 11

Analysiere die Laufzeitkomplexität der folgenden Python-Funktion in Abhängigkeit der Problemgrösse n.

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3       while n > 0:
4           s = s + n
5           n = n // 2
6       return s
```

Aufgabe 11

```
1  def funktion(n):
2      s = 0
3       while n > 0:
4           s = s + n
5           n = n // 2
6       return s
```

Der Aufruf der Funktion, die Zuweisung s=0 und die Rückgabe des Wertes benötigen jeweils konstante Zeit. Da sich der Wert von n bei jedem Durchlauf der while-Schleife halbiert, benötigt die Schleife $\log_2(n)$ Iterationen.

Somit: $T(n) = c_1 + c_2 \cdot \log_2(n) \in O(\log_2(n))$

Aufgabe 12

Zähle möglichst viele Darstellungsformen von Algorithmen auf und diskutiere ihre Vor- und Nachteile.

Aufgabe 12

- *natürliche Sprache*
  Vorteil: Kann auch von Menschen ohne Programmierkenntnissen verstanden werden
  Nachteil: Natürliche Sprache ist nicht immer präzise
- *Pseudocode*
  Vorteil: Klare und strukturierte Darstellung von Algorithmen
  Nachteil: Keine standardisierte Syntax
- *Struktogramm*
  Vorteil: Die Visuelle Darstellung kann das Verständnis erleichtern.
  Nachteil: Kann bei komplexen Algorithmen unübersichtlich werden
- *Quellcode einer Progammiersprache*
  Vorteil: Exakte und ausführbare Darstellung des Algorithmus
  Nachteil: Erfordert Kenntnisse der spezifischen Programmiersprache

Aufgabe 13

Welche Ausgabe macht das Programm für die Eingabe $x = 10$?

Eingabe: x
$y \leftarrow 3$
$x \leftarrow x + y$
$y \leftarrow x \mod 3$
Ausgabe: y

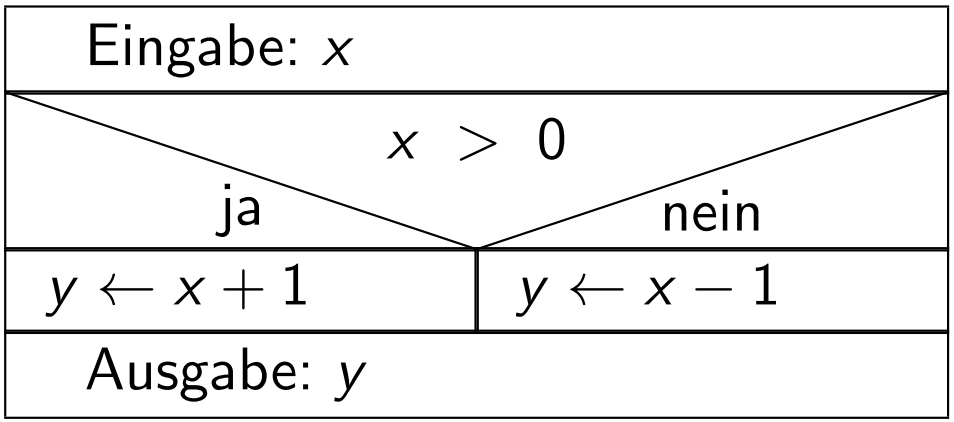
Aufgabe 13

Eingabe: x
$y \leftarrow 3$
$x \leftarrow x + y$
$y \leftarrow x \mod 3$
Ausgabe: y

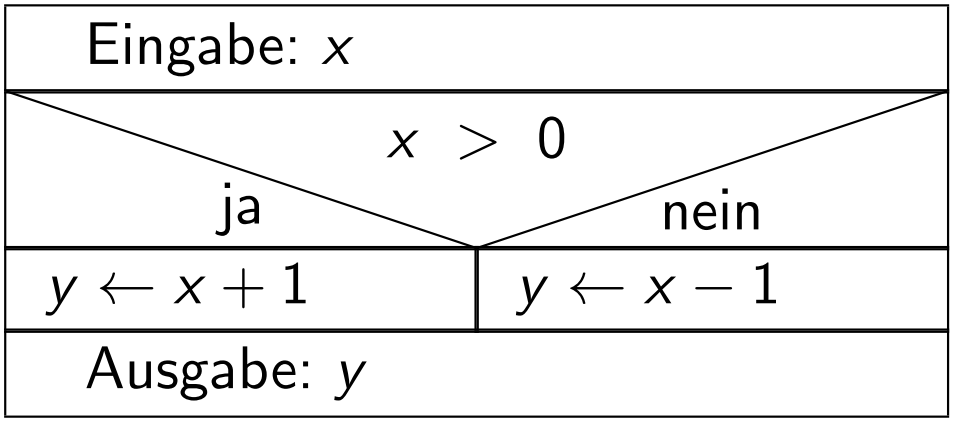
Ausgabe für $x = 10$: 1

Aufgabe 14

Welche Ausgabe macht das Programm für die Eingabe $x = 17$?



Aufgabe 14



Ausgabe für $x = 17$: 18

Aufgabe 15

Welche Ausgabe macht das Programm für die Eingabe $n = 5$?

Eingabe: n
$n < 10$
$\quad n \leftarrow n + 3$
Ausgabe: n

Aufgabe 15

Eingabe: n
$n < 10$
$n \leftarrow n + 3$
Ausgabe: n

Ausgabe für $n = 5$: 11

Aufgabe 16

Welche Ausgabe macht das Programm für die Eingabe $n = 3$?

Eingabe: n
$s \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
repeat until $i > n$
$\quad i \leftarrow i + 1$
$\quad s \leftarrow s + i$
Ausgabe: s

Aufgabe 16

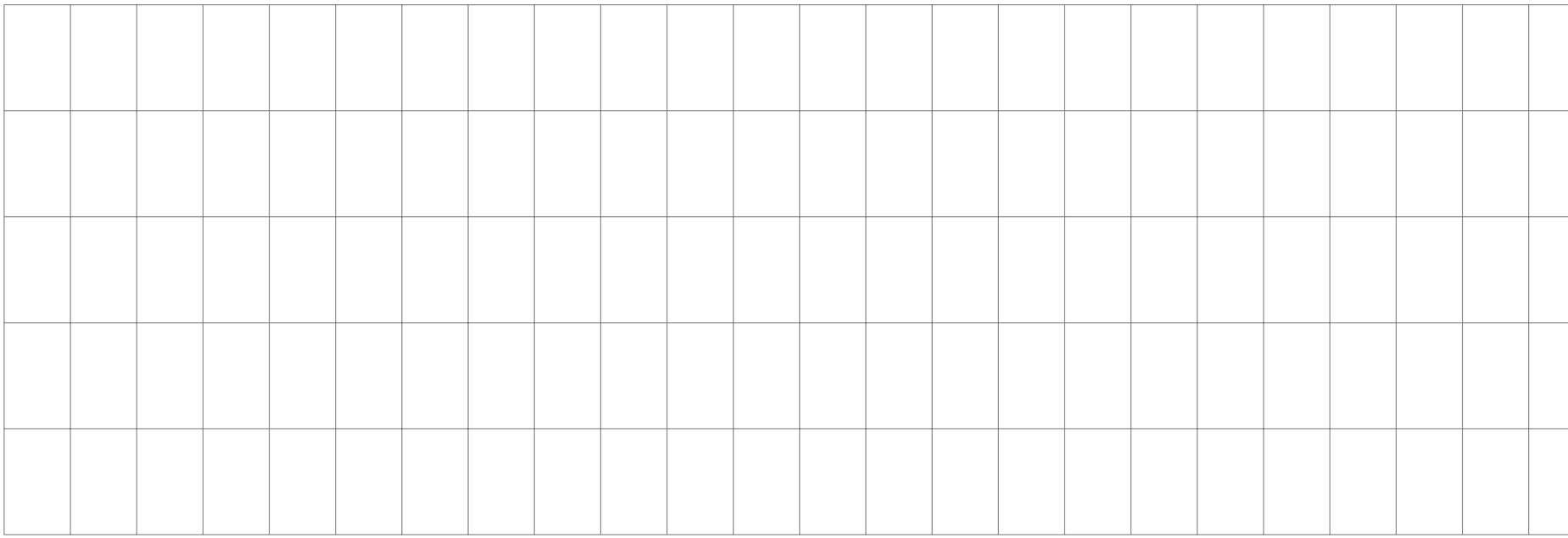
Hinweis: Annehmende Schleifen testen die Bedingung am Ende des Schleifenkörpers (Schleifenblocks) und verlassen die Schleife in der Regel dann, wenn die Bedingung *wahr* ist.

Eingabe: n
$s \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
$i \leftarrow i + 1$
$s \leftarrow s + i$
$i > n$
Ausgabe: s

Ausgabe für $n = 3$: 9

Aufgabe 17

Schreibe eine syntaktisch korrekte Python-Funktion, `gcd(a, b)`, die den grössten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen berechnet und als Wert zurückgibt.



Aufgabe 17

```
def gcd(a, b):
    b = abs(b)
    while b > 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```

Aufgabe 18

(a) Erkläre, was *Rekursion* in der Programmierung bedeutet.

(b) Nenne zwei Anwendungsbeispiele der Rekursion.

(c) Nenne einen Vor- und einen Nachteil der Rekursion.

Aufgabe 18

(a) Erkläre, was eine *rekursive Funktion* ist.

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die sich in ihrer Definition selber aufruft. Da dies zu einem nicht endenen Prozess führt, benötigt es eine Bedingung, welche diesen Prozess stoppt (Base Case).

Aufgabe 18

(a) Erkläre, was eine *rekursive Funktion* ist.

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die sich in ihrer Definition selber aufruft. Da dies zu einem nicht endenen Prozess führt, benötigt es eine Bedingung, welche diesen Prozess stoppt (Base Case).

(b) Nenne zwei Anwendungsbeispiele der Rekursion.

Binäre Suche, Quicksort

Aufgabe 18

(a) Erkläre, was eine *rekursive Funktion* ist.

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die sich in ihrer Definition selber aufruft. Da dies zu einem nicht endenen Prozess führt, benötigt es eine Bedingung, welche diesen Prozess stoppt (Base Case).

(b) Nenne zwei Anwendungsbeispiele der Rekursion.

Binäre Suche, Quicksort

(c) Nenne einen Vor- und einen Nachteil der Rekursion.

Vorteil: Rekursive Vorgänge haben oft eine kurze Beschreibung
Nachteil: Die wiederholten Aufrufe der Funktion legen viele Werte auf einem Stack ab, was zu einem Stack Overflow führen kann.

Aufgabe 19

Zeige möglichst detailliert, wie die rekursive definierte Funktion den Wert `f(4)` in der untersten Zeile des folgenden Codefragments berechnet.

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$f(4) = 2 + f(3)$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 + f(3) \\ &= 2 + (2 + f(2)) \end{aligned}$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1)))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1))) \\
&= 2 + (2 + (2 + (2 + f(0))))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1))) \\
&= 2 + (2 + (2 + (2 + f(0)))) \\
&\overset{*}{=} 2 + (2 + (2 + (2 + 3)))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1))) \\
&= 2 + (2 + (2 + (2 + f(0)))) \\
&\overset{*}{=} 2 + (2 + (2 + (2 + 3))) \\
&= 2 + (2 + (2 + 5))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1))) \\
&= 2 + (2 + (2 + (2 + f(0)))) \\
&\overset{*}{=} 2 + (2 + (2 + (2 + 3))) \\
&= 2 + (2 + (2 + 5)) \\
&= 2 + (2 + 7)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1))) \\
&= 2 + (2 + (2 + (2 + f(0)))) \\
&\overset{*}{=} 2 + (2 + (2 + (2 + 3))) \\
&= 2 + (2 + (2 + 5)) \\
&= 2 + (2 + 7) \\
&= 2 + 9
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 3
    else:
        return 2 + f(n-1)

print(f(4))
```

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 + f(3) \\
&= 2 + (2 + f(2)) \\
&= 2 + (2 + (2 + f(1))) \\
&= 2 + (2 + (2 + (2 + f(0)))) \\
&\overset{*}{=} 2 + (2 + (2 + (2 + 3))) \\
&= 2 + (2 + (2 + 5)) \\
&= 2 + (2 + 7) \\
&= 2 + 9 \\
&= 11
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

Zeige möglichst detailliert, wie die rekursive definierte Funktion den Wert `f(5)` in der untersten Zeile des folgenden Codefragments berechnet.

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$f(5) = 5 + f(3)$

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5 + f(3) \\
&= 5 + (3 + f(1))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5 + f(3) \\
&= 5 + (3 + f(1)) \\
&= 5 + (3 + (1 + f(-1)))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5 + f(3) \\
&= 5 + (3 + f(1)) \\
&= 5 + (3 + (1 + f(-1))) \\
&\overset{*}{=} 5 + (3 + (1 + 7))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5 + f(3) \\
&= 5 + (3 + f(1)) \\
&= 5 + (3 + (1 + f(-1))) \\
&\overset{*}{=} 5 + (3 + (1 + 7)) \\
&= 5 + (3 + 8))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5 + f(3) \\
&= 5 + (3 + f(1)) \\
&= 5 + (3 + (1 + f(-1))) \\
&\overset{*}{=} 5 + (3 + (1 + 7)) \\
&= 5 + (3 + 8)) \\
&= 5 + 11
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

```
def f(n):
    if n > 0:
        return n + f(n-2)
    else:
        return 7

print(f(5))
```

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5 + f(3) \\
&= 5 + (3 + f(1)) \\
&= 5 + (3 + (1 + f(-1))) \\
&\overset{*}{=} 5 + (3 + (1 + 7)) \\
&= 5 + (3 + 8)) \\
&= 5 + 11 \\
&= 16
\end{aligned}
$$

Aufgabe 21

Eine Person geht mit einer Einkaufsliste in den Supermarkt, sucht die Artikel, legt sie in den Einkaufwagen und streicht sie von der Liste ab. Untersuche kritisch, ob es sich bei dieser Tätigkeit um einen Algorithmus handelt und verwende Fachbegriffe.

Aufgabe 21

Ein Einkauf mit Liste ist ein *Lösungsverfahren*.

- Es ist *endlich*, da Einkaufslisten nicht unendlich lange sind.
- Es ist nicht *deterministisch*, da nicht gesagt wird, wie bei der Suche vorgegangen werden soll.
- Es ist möglicherweise nicht effektiv, wenn der Artikel (derzeit) im Sortiment fehlt.

Aufgabe 22

Zeige schrittweise, wie der euklidische Algorithmus $\mathrm{ggT}(32, 18)$ berechnet.

Aufgabe 22

$$\mathrm{ggT}(32, 18) = (18, 14) = (14, 4) = (4, 2) = (2, 0) = 2$$