

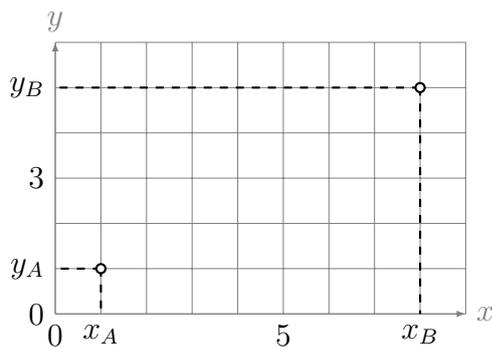
Der Bresenham-Algorithmus für Linien

Die Aufgabe

- Es soll eine Linie von einem Startpunkt (x_A, y_A) zu einem Endpunkt (x_B, y_B) gezeichnet werden.
- Die Koordinaten der Punkte sind ganzzahlig. Die Pixel sind nicht überlappende Kreisscheiben oder Quadrate mit den Gitterpunkten als Zentrum.
- Die Breite der Linie beträgt ein Pixel.
- Ein Pixel ist entweder gesetzt oder nicht gesetzt. (keine Grau- oder Farbstufen)
- Für die Steigung m der Linie gilt $0 \leq m \leq 1$.

Der „naive“ Ansatz

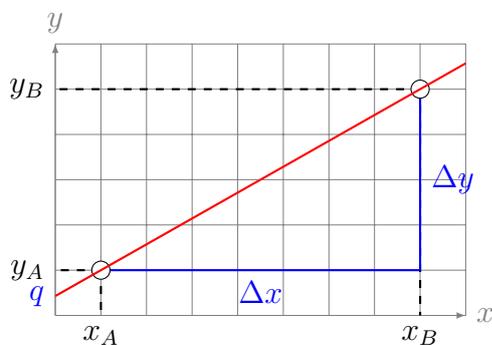
Berechne für jedes x_i mit $x_A \leq x_i \leq x_B$ den Funktionswert $y = f(x_i)$ der Geraden $g = (AB)$. Runde diesen Wert auf die nächste ganze Zahl y_i und zeichne das Pixel (x_i, y_i) .



Wo liegt das Problem?

aufwändige Gleitkommaoperationen!

Die Koordinatengleichung der Gerade



Die Mathematik

Mit

- $\Delta x = x_B - x_A = 8 - 1 = 7$
- $\Delta y = y_B - y_A = 5 - 1 = 4$
- $m = \Delta y / \Delta x = 4/7$
- $q = y_A - m \cdot x_A = 1 - 4/7 \cdot 1 = 3/7$

erhält man aus $g: y = mx + q$ die Koordinatenform:

$$y = mx + q$$

$$y = 4/7 \cdot x + 3/7 \quad || \cdot 7$$

$$7y = 4x + 3$$

$$0 = 4x - 7y + 3$$

Mit

$$F(x, y) = 4x - 7y + 3$$

erhält man eine Funktion mit einer nützlichen Eigenschaft:

- $F(x, y) > 0$, falls (x, y) unterhalb von g liegt

$$F(4, 2) = 4 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 3 = 5$$

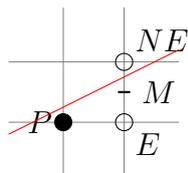
- $F(x, y) < 0$, falls (x, y) oberhalb von g liegt

$$F(5, 4) = 4 \cdot 5 - 7 \cdot 4 + 3 = -5$$

- $F(x, y) = 0$, falls (x, y) auf g liegt

$$F(1, 1) = 4 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 3 = 0$$

Diese Eigenschaft von $F(x, y)$ kann genutzt werden, die Position des nächsten Pixels zu bestimmen. Wegen der Einschränkung $0 \leq m \leq 1$ gibt es für das auf $P(x, y)$ folgende Pixel nur zwei Positionen: im Osten (E) oder im Nordosten (NE).



$F(x, y)$ wird in der Mitte $M(x_M, y_M)$ von E und NE ausgewertet.

Erhält man $F(x_M, y_M) > 0$, liegt M unterhalb von g und das Pixel NE wird gezeichnet.

Erhält man $F(x_M, y_M) \leq 0$, liegt M oberhalb von g oder auf g und das Pixel E wird gezeichnet.

Bestimme die Folge der Pixel für die Strecke im Beispiel:

$$\text{Start: } P_1 = A = (1, 1) \quad d = F(1, 1) = 4 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$d = F(2, 1.5) = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1.5 + 3 = +0.5 > 0 \quad \xrightarrow{NE} \quad P_2(2, 2)$$

$$d = F(3, 2.5) = 4 \cdot 3 - 7 \cdot 2.5 + 3 = -2.5 < 0 \quad \xrightarrow{E} \quad P_3(3, 2)$$

$$d = F(4, 2.5) = 4 \cdot 4 - 7 \cdot 2.5 + 3 = +1.5 > 0 \quad \xrightarrow{NE} \quad P_4(4, 3)$$

$$d = F(5, 3.5) = 4 \cdot 5 - 7 \cdot 3.5 + 3 = -1.5 < 0 \quad \xrightarrow{E} \quad P_5(5, 3)$$

...

Beobachtung

Für die Entscheidungsvariable d nur 3 Typen von Wertänderungen:

- nach Start: $+\Delta y - 0.5\Delta x = 4 - 3.5 = +0.5$
- nach NE : $+\Delta y - \Delta x = 4 - 7 = -3$
- nach E : $+\Delta y = +4$

Gebrochene Werte lassen sich vermeiden, indem wir $F(x, y)$ mit **2** multiplizieren. Entsprechend sind auch die obigen Wertänderungen zu verdoppeln.

Damit können wir ganz auf die Berechnung von $F(x, y)$ verzichten und für jedes Pixel inkrementell den Wert der Entscheidungsvariable berechnen und das zugehörige Pixel setzen.

Python-Implementierung (Basisversion)

```
1 def bresenham(xA, yA, xB, yB):
2     Dx, Dy = xB-xA, yB-yA
3     x, y = xA, yA
4     d = 2*Dy - Dx
5     dNE = 2*(Dy - Dx)
6     dE = 2*Dy
7     while x <= xB:
8         draw_pixel(x, y)
9         x = x + 1
10        if d > 0:
11            y = y + 1
12            d += dNE
13        else:
14            d += dE
```

Laufzeitkomplexität

Inputgröße: n Pixel in der horizontalen (schnellen) Richtung

Laufzeitkomplexität: $O(n)$

Was noch fehlt

Aktuell können nur Geraden mit einer Steigung von 0° bis 45° gezeichnet werden.

Durch Ausnutzung der Symmetrien können die übrigen 7 Fälle durch Fallunterscheidungen auf die oben dargestellte Situation zurückgeführt werden:

- Abhängig vom Vorzeichen von Δy erfolgt die Änderung in y -Richtung um $+1$ oder -1 .
- Für den Fall $|\Delta x| < |\Delta y|$, wird das Verfahren mit vertauschten Rollen von x und y angewendet.
- Falls $\Delta x < 0$ oder $\Delta y < 0$ muss die Schleife rückwärts durchlaufen werden.