

Datenstrukturen (Kapitel 4)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Nenne drei Anwendungen, die sich mittels gerichteter oder ungerichteter Graphen modellieren lassen und beschreibe jeweils wofür die Knoten und Kanten stehen.

Aufgabe 1

Anwendung	Knoten	Kanten
Strassennetz	Kreuzung	Strasse
World Wide Web	Website	Link
Soziales Netzwerk	Person	Kontakt
Handel	Käufer, Verkäufer	Geld-/Warenstrom
elektronische Schaltung	Bauteil (Widerstand)	Draht
Produktionsplan	Produktionsschritt	Reihenfolge

Aufgabe 2

Zeichne ein Bild des Graphen $G = (V, E)$ ohne sich kreuzende Kanten

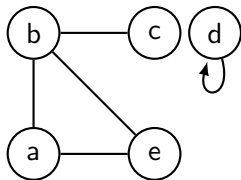
mit $V = \{a, b, c, d, e\}$

und $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{d, d\}\}$.

Aufgabe 2

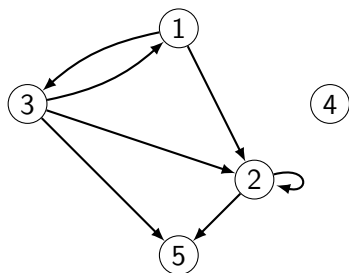
$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{d, d\}\}$$

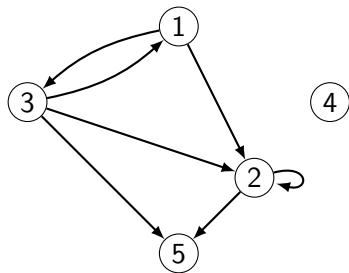


Aufgabe 3

Stelle den Graphen $G = (V, E)$ formal korrekt durch seine Knoten- und Kantemenge dar.



Aufgabe 3



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5)\}$$

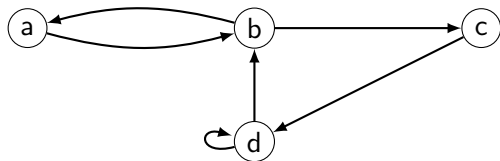
Aufgabe 4

Stelle den folgenden Graphen

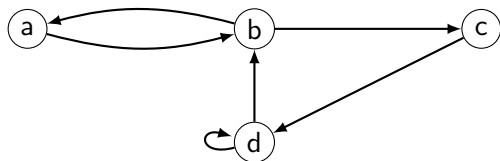
(a) als Adjazenzmatrix

(b) als Adjazenzliste

dar.



Aufgabe 4



(a)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	0	1	0	0
<i>b</i>	1	0	1	0
<i>c</i>	0	0	0	1
<i>d</i>	0	1	0	1

(b) Adjazenzliste

<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a, c</i>
<i>c</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>b, d</i>

Aufgabe 5

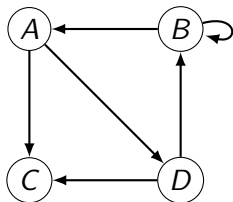
Zeichne den Graphen, der zur folgenden Adjazenzmatrix gehört, wenn die Knoten mit aufsteigendem Index die Namen (A, B, C, D) haben.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

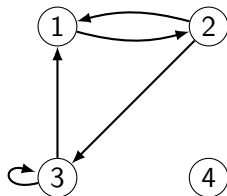
Aufgabe 5

Beachte, dass der Eintrag $M_{i,j}$ in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte der Matrix M die Kante (v_i, v_j) bezeichnet.

	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	1	1	0	1
C	0	0	0	0
D	0	1	1	0

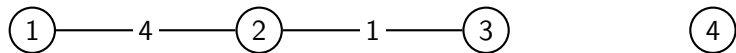


Aufgabe 6



```
1 G = {  
2     1: {2},  
3     2: {1, 3},  
4     3: {1},  
5     4: set() # beachte: {} ist ein leeres Dictionary  
6 }
```


Aufgabe 7



```
1 G = {  
2     1: {2:4},  
3     2: {1:4, 3:1},  
4     3: {2:1},  
5     4: {} # oder: dict()  
6 }
```

Aufgabe 8

Vervollständige die Methoden `add_node` und `add_edge` der Klasse `Graph` zum Erzeugen einer Adjazenzmengendarstellung ungerichteter Graphen. Einrückungstiefe: 2 Zeichen

```
class Graph:
    def __init__(self):
        self.adj=dict()
    def add_node(self,u):
    def add_edge(self,u,v):
```

Aufgabe 8

```
1 class Graph:
2
3     def __init__(self):
4         self.adj = dict()
5
6     def add_node(self, v):
7         if v not in self.adj:
8             self.adj[v] = set()
9
10    def add_edge(self, u, v):
11        self.add_node(u)
12        self.add_node(v)
13        self.adj[u].add(v)
14        self.adj[v].add(u)
```


Aufgabe 9

```
1 class Digraph:
2
3     def __init__(self):
4         self.adj = dict()
5
6     def add_node(self, v):
7         if v not in self.adj:
8             self.adj[v] = set()
9
10    def add_edge(self, u, v):
11        self.add_node(u)
12        self.add_node(v)
13        self.adj[u].add(v)
```

Aufgabe 10

Gegeben sind der Graph $G = (V_G, E_G)$ mit

$V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und

$E_G = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}\}$

sowie der Graph $H = (V_H, E_H)$ mit

$V_H = \{b, c, f, g\}$ und

$E_H = \{\{b, c\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{b, f\}\}$

Ist H Teilgraph von G ?

Aufgabe 10

$G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und
 $E_G = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}\}$

Aufgabe 10

$G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und

$E_G = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}\}$

$H = (V_H, E_H)$ mit $V_H = \{b, c, f, g\}$ und

$E_H = \{\{b, c\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{b, f\}\}$

Aufgabe 10

$G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und
 $E_G = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}\}$

$H = (V_H, E_H)$ mit $V_H = \{b, c, f, g\}$ und
 $E_H = \{\{b, c\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{b, f\}\}$

Ist H Teilgraph von G ?

Aufgabe 10

$G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und
 $E_G = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}\}$

$H = (V_H, E_H)$ mit $V_H = \{b, c, f, g\}$ und
 $E_H = \{\{b, c\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{b, f\}\}$

Ist H Teilgraph von G ?

Ist G korrekt definiert? Ja

Ist H korrekt definiert? Ja

Somit ist H genau dann Teilgraph von G wenn $V_H \subset V_G$ und
 $E_H \subset E_G$

Aufgabe 10

$G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und
 $E_G = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}\}$

$H = (V_H, E_H)$ mit $V_H = \{b, c, f, g\}$ und
 $E_H = \{\{b, c\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{b, f\}\}$

Ist H Teilgraph von G ?

Ist G korrekt definiert? Ja

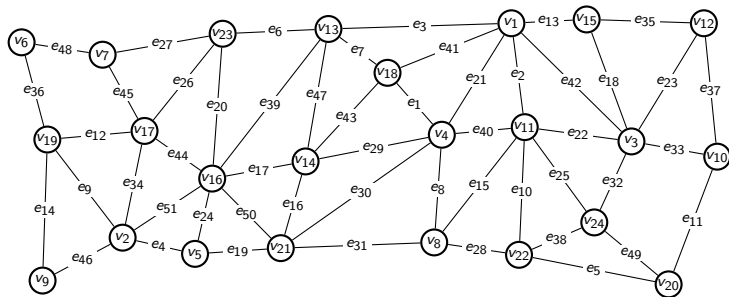
Ist H korrekt definiert? Ja

Somit ist H genau dann Teilgraph von G wenn $V_H \subset V_G$ und
 $E_H \subset E_G$

Da $V_H \subset V_G$ und $E_H \subset E_G \Rightarrow H$ ist Teilgraph von G

Aufgabe 11

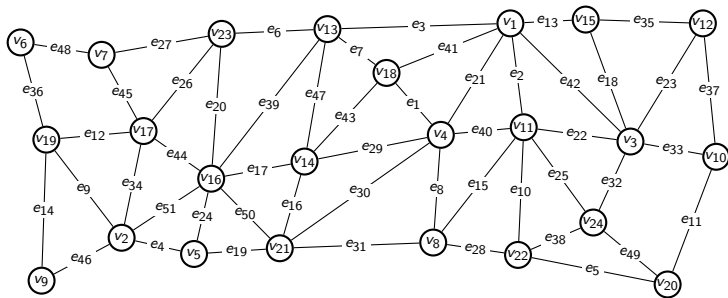
Kreuze die richtigen Antworten zu den Fragen zum abgebildeten Graphen G an.



- (a) G ist schlingenfrei
- (b) G ist nicht zusammenhängend
- (c) G ist vollständig
- (d) G hat 24 Knoten, 51 Kanten und 29 Flächen
- (e) v_4 und v_{14} sind inzident
- (f) e_{22} und e_{32} sind adjazent
- (h) $v_6 v_7 v_{17} v_9$ ist ein Kantenzug
- (i) $v_{13} v_{14} v_{18} v_{13}$ ist ein Pfad

wahr falsch

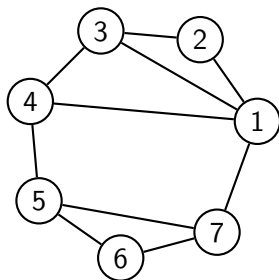
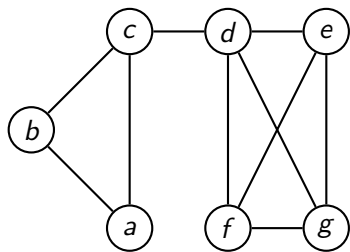
Aufgabe 11



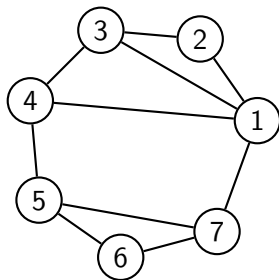
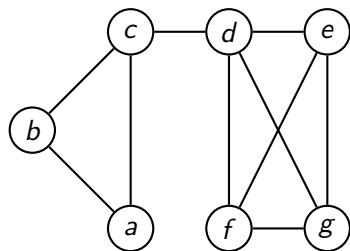
- | | wahr | falsch |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) G ist schlingenfrei | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) G ist nicht zusammenhängend | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (c) G ist vollständig | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (d) G hat 24 Knoten, 51 Kanten und 29 Flächen | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (e) v_4 und v_{14} sind inzident | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (f) e_{22} und e_{32} sind adjazent | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (h) $v_6 v_7 v_{17} v_9$ ist ein Kantenzug | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (i) $v_{13} v_{14} v_{18} v_{13}$ ist ein Pfad | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (j) $v_{17} v_{16} v_{21} v_5 v_{16} v_{14}$ ist ein Zyklus | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (k) $v_{22} v_{24} v_{11} v_{22}$ ist ein Weg | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (l) $\max\{\deg(v) : v \in V\} = 6$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (m) Der kürzeste Weg von v_9 nach v_{12} hat die Länge 7 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (n) G hat Cliques mit der Cliquenzahl 4 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Aufgabe 12

Sind die beiden Graphen isomorph? Begründe die Antwort.



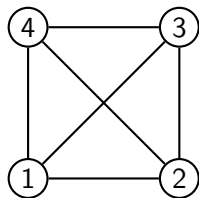
Aufgabe 12



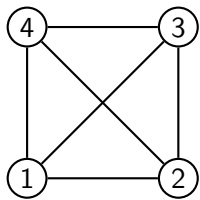
Zwar gibt es im Graph links und rechts genau zwei Knoten vom Grad 2 (a, b und $2, 6$) aber während links a und b durch eine Kante verbunden sind, ist dies bei den entsprechenden Knoten des Graphen rechts nicht der Fall. Somit können die Graphen nicht isomorph sein.

Aufgabe 13

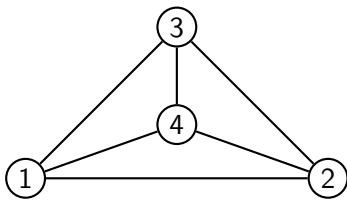
Ist der folgende Graph K_4 plättbar? Wenn ja, zeichne ihn ohne kreuzende Kanten.



Aufgabe 13

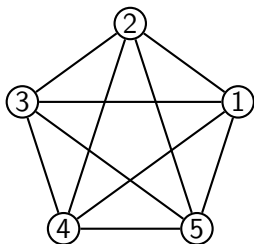


\Rightarrow



Aufgabe 14

Ist der folgende Graph K_5 plättbar? Wenn ja, zeichne ihn ohne kreuzende Kanten.



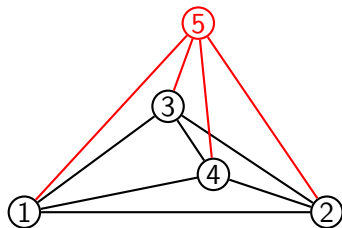
Aufgabe 14

Der vollständige Graph K_5 ist der kleinste Graph mit 5 Knoten, der nicht plättbar ist.

Aufgabe 14

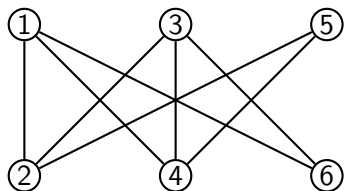
Der vollständige Graph K_5 ist der kleinste Graph mit 5 Knoten, der nicht plättbar ist.

Die folgende Skizze ist zwar kein formaler Beweis, macht aber plausibel, dass K_5 nicht plättbar ist. Dazu zeichnen wir eine geplättete Version von K_4 (schwarz) und verbinden alle seine Ecken mit einem fünften Knoten (rot), womit wir K_5 erhalten. Wo auch immer wir den fünften Knoten positionieren; seine Kanten mit K_4 schneiden immer mindestens eine schwarze Kante. Würden wir diese eine Kante entfernen, dann wäre der Graph planar.

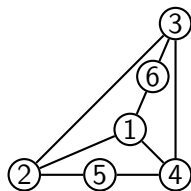
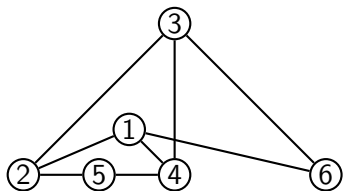
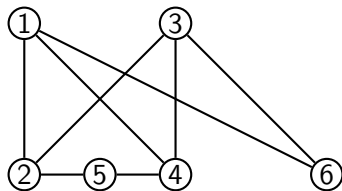
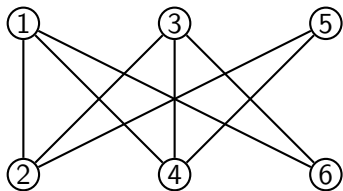


Aufgabe 15

Ist der folgende Graph plättbar? Wenn ja, zeichne ihn ohne kreuzende Kanten.

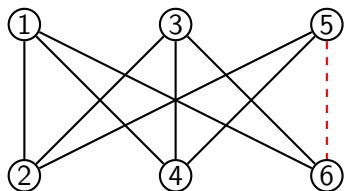


Aufgabe 15



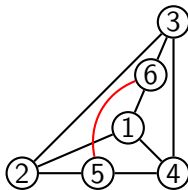
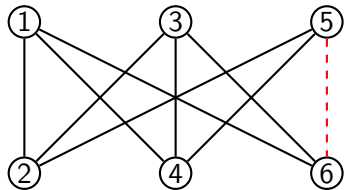
Aufgabe 16

Ist der folgende Graph plättbar? Wenn ja, zeichne ihn ohne kreuzende Kanten.



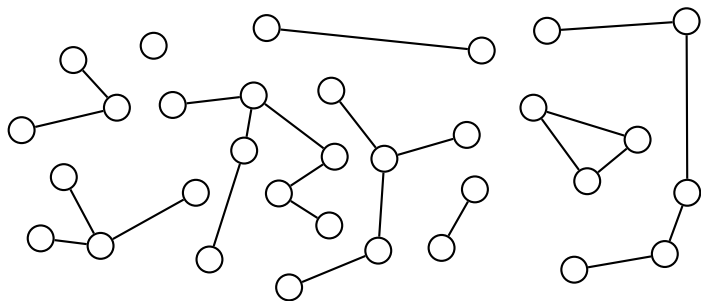
Aufgabe 16

Auch dies ist kein Beweis aber entfernt man die Kante (5,6), so entsteht der Graph, den wir in der letzten Aufgabe ohne kreuzende Kanten darstellen konnten. Fügen wir diese Kante wieder hinzu (rot), so sehen wir, dass sich jetzt zwingend mindestens zwei Kanten kreuzen.

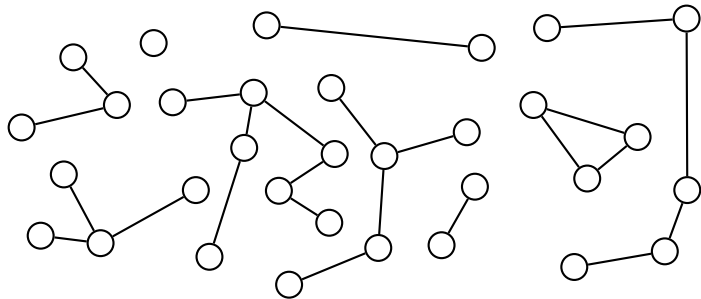


Aufgabe 17

Wie viele Zusammenhangskomponenten hat dieser Graph?



Aufgabe 17



Der Graph hat 9 Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 18

Wie viele Kanten hat der vollständige Graph K_{11} mit 11 Knoten?

Aufgabe 18

$$K_{11} \text{ hat } \frac{11 \cdot 10}{2} = 11 \cdot 5 = 55 \text{ Kanten.}$$

Aufgabe 19

Definiere einen Baum als speziellen Graphen.

Aufgabe 19

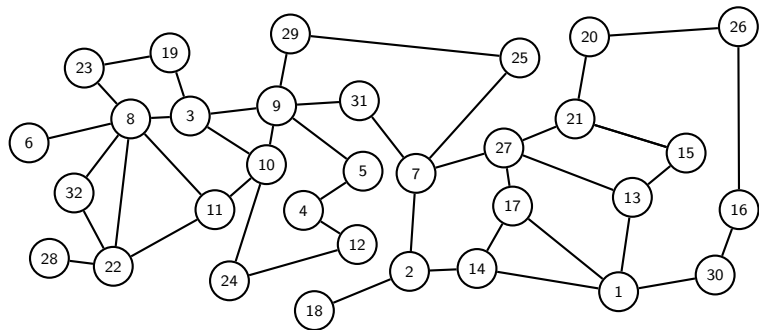
Ein Baum ist ein *zusammenhängender* und *zyklenfreier* Graph.

Aufgabe 20

Der Minimalgrad $\delta(G)$ und der Maximalgrad $\Delta(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ sind wie folgt definiert:

- ▶ $\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V\}$
- ▶ $\Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V\}$

Bestimme $\delta(G)$ und $\Delta(G)$ im unten abgebildeten Graphen.



Aufgabe 20

$$\delta(G) = 1 \text{ und } \Delta(G) = 6$$

Aufgabe 21

Wie viele Flächen hat ein planarer Graph $G = (V, E)$ mit 100 Knoten und 100 Kanten?

Aufgabe 21

Die Anzahl der Flächen $|F|$ lässt sich aus der eulerschen Polyederformel gewinnen.

Hinweis: Wer sich die eulerschen Polyederformel nicht merken kann, leitet sie z. B. mit dem Graphen mit $|V| = 1$ Knoten, $|E| = 0$ Kanten und $|F| = 1$ Flächen her. Man muss nur wissen, dass Plus- und Minuszeichen so gesetzt werden müssen, so dass $|V| - |E| + |F| = 2$ gilt.

Aus den Größen des Beispiels folgt dann $+ \underbrace{|V|}_1 - \underbrace{|E|}_0 + \underbrace{|F|}_1 = 2$

Aufgabe 21

Die Anzahl der Flächen $|F|$ lässt sich aus der eulerschen Polyederformel gewinnen.

Hinweis: Wer sich die eulerschen Polyederformel nicht merken kann, leitet sie z. B. mit dem Graphen mit $|V| = 1$ Knoten, $|E| = 0$ Kanten und $|F| = 1$ Flächen her. Man muss nur wissen, dass Plus- und Minuszeichen so gesetzt werden müssen, so dass $?|V|?|E|?|F| = 2$ gilt.

Aus den Grössen des Beispiels folgt dann $+ \underbrace{|V|}_1 - \underbrace{|E|}_0 + \underbrace{|F|}_1 = 2$

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$$100 - 100 + |F| = 2$$

$$|F| = 2$$

Aufgabe 22

Kann es in einem Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 43$ Knoten 21 Knoten mit geradem Grad geben? Begründe die Antwort.

Aufgabe 22

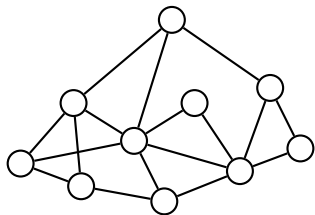
Wenn es in einem Graphen mit $|V| = 43$ Knoten 21 Knoten mit geradem Grad gibt, so gibt es 22 Knoten mit ungeradem Grad.

Somit ist die Summe aller Knotengrade gerade, was nicht im Widerspruch zur Beziehung $\deg(G) = 2|E|$ steht.

Somit kann es in G 21 Knoten mit geradem Grad geben.

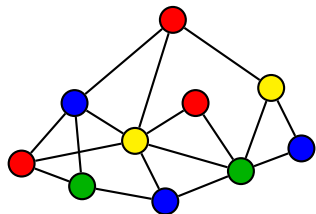
Aufgabe 23

Welche chromatische Zahl $\chi(G)$ hat der abgebildete Graph?



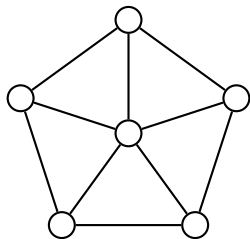
Aufgabe 23

Der Graph hat die chromatische Zahl $\chi(G) = 4$



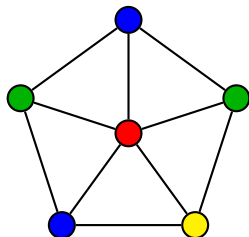
Aufgabe 24

Welche chromatische Zahl $\chi(G)$ hat der abgebildete Graph?



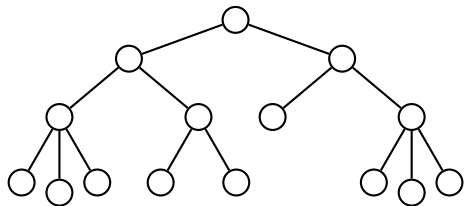
Aufgabe 24

Der Graph hat die chromatische Zahl $\chi(G) = 4$



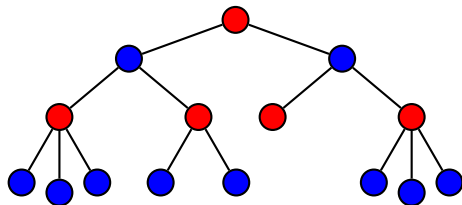
Aufgabe 25

Welche chromatische Zahl $\chi(G)$ hat der abgebildete Graph?



Aufgabe 25

Der Graph hat die chromatische Zahl $\chi(G) = 2$



Aufgabe 26

Welche chromatische Zahl hat der vollständige Graph K_5 ?

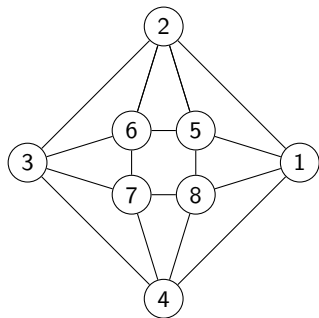
Aufgabe 26

Da in einem vollständigen Graph mit 5 Knoten jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist, werden auch 5 Farben benötigt.

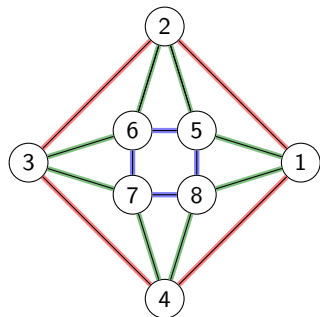
Daher gilt $\chi(K_5) = 5$

Aufgabe 27

Existiert eine Eulertour oder ein Eulerpfad? Falls ja, bestimme eine(n) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch ein Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



Aufgabe 27



$$P_E = (1)$$

$$P_E = (1, 2, 3, 4, 1)$$

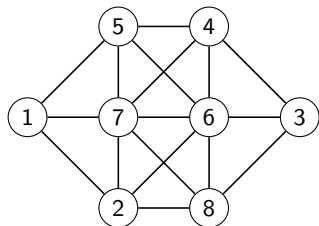
$$P_E = (1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 1, 2, 3, 4, 1)$$

$$P_E = (1, 5, 6, 7, 8, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 1, 2, 3, 4, 1)$$

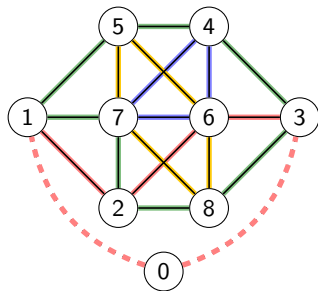
$$P_H = (1, 2, 3, 6, 5, 8, 7, 4, 1)$$

Aufgabe 28

Existiert eine Eulertour oder ein Eulerpfad? Falls ja, bestimme eine(n) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch ein Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



Aufgabe 28



p Füge eine Scheinkante 0 und die Kanten $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$ ein.

$$P_E = (0)$$

$$P_E = (0, 1, 2, 6, 3, 0)$$

$$P_E = (0, 1, 5, 4, 3, 8, 2, 7, 1, 2, 6, 3, 0)$$

$$P_E = (0, 1, 5, 4, 6, 7, 4, 3, 8, 2, 7, 1, 2, 6, 3, 0)$$

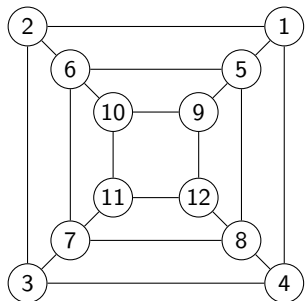
$$P_E = (0, 1, 5, 6, 8, 7, 5, 4, 6, 7, 4, 3, 8, 2, 7, 1, 2, 6, 3, 0)$$

$$P_E = (1, 5, 6, 8, 7, 5, 4, 6, 7, 4, 3, 8, 2, 7, 1, 2, 6, 3) \text{ (Scheinknoten entfernen)}$$

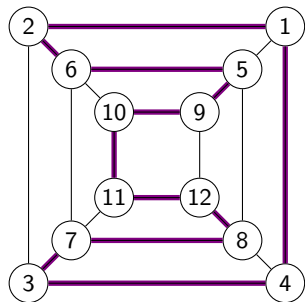
$$P_H = (1, 2, 8, 3, 4, 5, 6, 7, 1)$$

Aufgabe 29

Existiert eine Eulertour oder ein Eulerpfad? Falls ja, bestimme eine(n) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch ein Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



Aufgabe 29



Es gibt weder eine Eulertour noch einen Eulerpfad, da der Graph 8 Knoten mit ungeradem Grad hat.

$$P_H = (1, 2, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 8, 7, 3, 4, 1)$$

Aufgabe 30

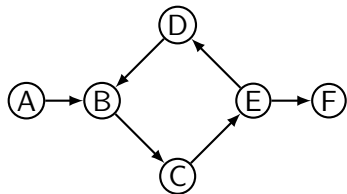
Nenne zwei Anwendungen, in denen die topologische Sortierung sinnvoll ist und beschreibe auch Situationen, in denen sie nicht funktioniert.

Aufgabe 30

Die topologische Sortierung bezeichnet den Vorgang, eine Menge von Dingen in eine Reihenfolge zu bringen, bei der vorgegebene Abhängigkeiten erfüllt sein müssen.

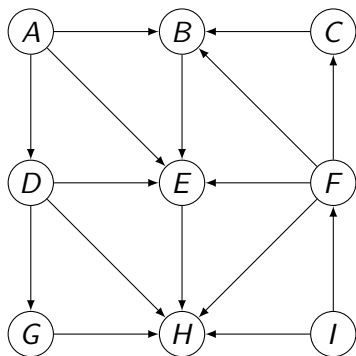
Zum Beispiel bei der Produktion eines Produkts, bei dem bestimmte Fertigungsschritte erfolgt sein müssen, bevor der nächste ausgeführt wird. Oder bei Vorlesungen, die erst dann besucht werden sollten, nachdem man die nötigen Grundlagen in anderen Vorlesungen erworben hat.

Die topologische Sortierung funktioniert nicht, wenn die zu sortierenden Objekte gegenseitige Abhängigkeiten aufweisen; d. h. der zugehörige Graph Zyklen hat.

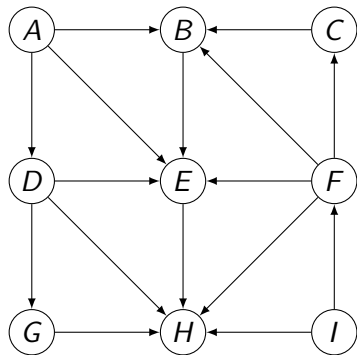


Aufgabe 31

Bestimme zum folgenden gerichteten Graphen eine topologische Sortierung oder stelle fest, dass dies nicht möglich ist.



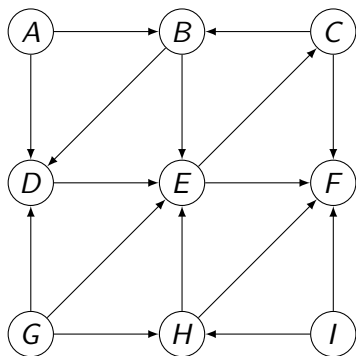
Aufgabe 31



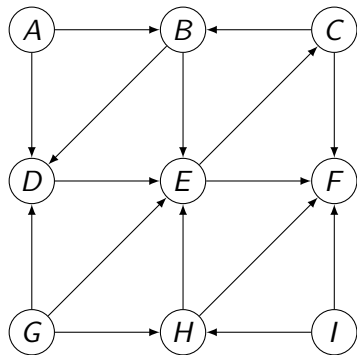
Bemerkung: Aus Platzgründen werden in dieser Lösung zuerst alle Knoten ohne eingehenden Kanten bestimmt und erst dann deren Kanten entfernt. Dies kann manchmal zu einer anderen Reihenfolge führen, als wenn die Kanten unmittelbar nach dem Auffinden eines Knotens ohne eingehende Kanten gelöscht werden und so gewisse Knoten schon früher von eingehenden Kanten „befreit“ werden. Die topologische Sortierung ist aber trotzdem noch korrekt. Wenn der Graph nicht zu groß ist, kann man die eigene Lösung prüfen, indem man die gerichteten Kanten des Graphen auf die eigene Sortierung überträgt. Geht kein Pfeil rückwärts (also von rechts nach links), stimmt die Lösung.

Aufgabe 32

Bestimme zum folgenden gerichteten Graphen eine topologische Sortierung oder stelle fest, dass dies nicht möglich ist.



Aufgabe 32



A, G, I haben keine eingehende Kanten $\Rightarrow S = [A, G, I]$

Streiche alle ausgehenden Kanten von A, G, I

H hat keine eingehende Kanten $\Rightarrow S = [A, G, I, H]$

Der Graph hat keine Knoten ohne eingehende Kanten und ist nicht leer. Somit ist der Graph zyklisch ($BDECB, BECB$) und kann nicht topologisch sortiert werden.