Das Travelling Salesman Problem

Übungen

Aufgabe 1

Notiere alle Permutationen der Elemente der Liste `[P, Q, R, S]`.

Aufgabe 1

```
[P, Q, R, S]  [Q, P, R, S]  [R, P, Q, S]  [S, P, Q, R]
[P, Q, S, R]  [Q, P, S, R]  [R, P, S, Q]  [S, P, R, Q]
[P, R, Q, S]  [Q, R, P, S]  [R, Q, P, S]  [S, Q, P, R]
[P, R, S, Q]  [Q, R, S, P]  [R, Q, S, P]  [S, Q, R, P]
[P, S, Q, R]  [Q, S, P, R]  [R, S, P, Q]  [S, R, P, Q]
[P, S, R, Q]  [Q, S, R, P]  [R, S, Q, P]  [S, R, Q, P]
```

Aufgabe 2

Wie viele Permutationen gibt es für eine Liste mit 6 verschiedenen Elementen?

Aufgabe 2

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Aufgabe 3

Nenne zwei verschiedene Anwendungen des TSP.

Aufgabe 3

- Routenplanung
- Steuerung von Bohrern bei Leiterplatten

Aufgabe 4

Wie viele Kanten hat ein vollständiger (einfacher) Graph mit $n = 201$ Knoten?

Aufgabe 4

$$|V| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{201 \cdot 200}{2} = 201 \cdot 100 = 20\,100\,\text{Kanten}$$

Aufgabe 5

Leite her, warum die Laufzeitkomplexität für die Lösung des Travelling Salesman Problems mit dem Brute-Force-Algorithmus $n!$ beträgt

Aufgabe 5

Wählt man eine Stadt als Start- und Zielort, gibt es noch

$(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$

Möglichkeiten, die übrigen Städte zu besuchen.

Bei jeder dieser $(n-1)!$ Rundreisen müssen n Distanzen aus der Distanzmatrix gelesen und addiert werden:

$n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Schritte.

$\Rightarrow O(n!)$

Sind die Distanzen symmetrisch, müssen wir nur die Hälfte der Routenberechnungen durchführen, weil es zu jeder Route auch eine Route in umgekehrter Richtung mit gleicher Länge gibt.

Auch in diesem Fall gilt: $O(\frac{1}{2} \cdot n!) = O(n!)$

Aufgabe 6

Bestimme die kürzeste Rundreise im Travelling Salesman Problem auf der Grundlage der folgenden Distanztabelle:

	nach A	nach B	nach C	nach D
von A	0	2	5	6
von B	2	0	4	3
von C	5	4	0	1
von D	6	3	1	0

Aufgabe 6

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Suche nach der kürztesten Rundreise in der Stadt A beginnen.

A, B, C, D, A: 13

A, B, D, C, A: 11 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, C, B, D, A: 18

A, C, D, B, A: 11 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, D, B, C, A: 18

A, D, C, B, A: 13

Aufgabe 7

Bestimme die kürzeste Rundreise im Travelling Salesman Problem auf der Grundlage der folgenden unsymmetrischen Distanztabelle:

	nach A	nach B	nach C	nach D
von A	0	11	10	2
von B	1	0	8	3
von C	5	12	0	6
von D	7	4	9	0

Aufgabe 7

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Suche nach der kürztesten Rundreise in der Stadt A beginnen.

A, B, C, D, A: 32

A, B, D, C, A: 28

A, C, B, D, A: 32

A, C, D, B, A: 21

A, D, B, C, A: 19 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, D, C, B, A: 24

Aufgabe 8

Eine Implementation des Brute-Force-Verfahrens für das TSP benötigt auf einem PC 10 Sekunden für 11 Städte. Wie lange wird dasselbe Programm auf dem gleichen PC für 12 Städte benötigen?

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$T(n) = C \cdot n!$

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$$T(n) = C \cdot n!$$

$$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$$T(n) = C \cdot n!$$

$$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\text{s}$$

$$T(12) = C \cdot 12! = C \cdot 12 \cdot 11! = 12 \cdot C \cdot 11! = 12 \cdot 10\,\text{s} = 120\,\text{s}$$

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$T(n) = C \cdot n!$

$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\mathrm{s}$

$T(12) = C \cdot 12! = C \cdot 12 \cdot 11! = 12 \cdot C \cdot 11! = 12 \cdot 10\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{s}$

also etwa 120 Sekunden

Aufgabe 9

Ein symmetrisches TSP heisst *metrisch*, wenn für jeweils drei beliebige Städte A, B, C der direkte Weg A nach B nie länger ist, als der von A über C nach B. Formal:

$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ für alle Städte A, B, C

Untersuche, ob die folgende Distanzmatrix zu einem metrischen TSP gehört.

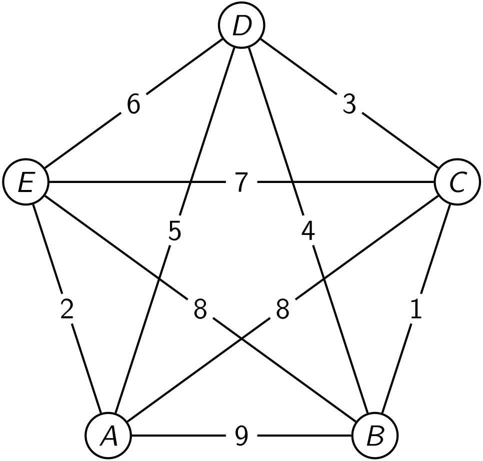
	A	B	C	D
A	0	9	1	6
B	9	0	1	1
C	1	2	0	3
D	6	9	3	0

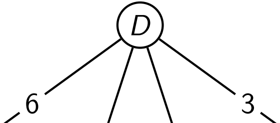
Aufgabe 9

Nein

Aufgabe 10

Löse das folgende TSP mit der MST-Heuristik.





Aufgabe 10