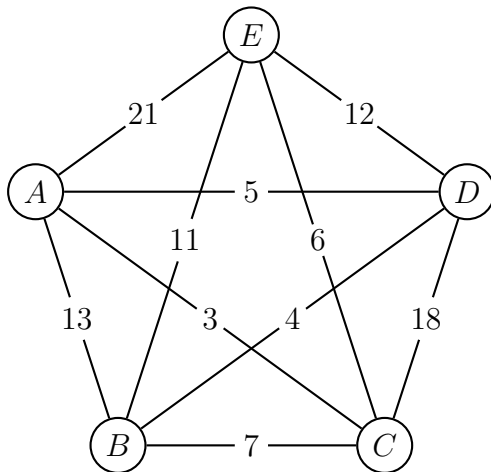


Fragestellung

Ein Handelsvertreter soll n Städte besuchen und wieder in die zuerst besuchte Stadt zurückkehren. Welches ist die kürzeste Route, wenn alle paarweisen Distanzen zwischen jeweils zwei Städten bekannt sind?

Beispiel

Städtemodell ($n = 5$)



Graphen

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, bestehend aus

- einer *Knotenmenge* V (*vertices*)
- einer *Kantemenge* E (*edges*)

In obigen Fall ist der Graph

- *ungerichtet*, da die Kanten nicht orientiert sind,
- *vollständig*, da jeder Knoten mit jedem, Knoten durch eine Kante verbunden ist und
- *gewichtet*, da es eine Funktion w gibt, die jeder Kante $(x, y) \in E$ eine reelle Zahl $w(x, y)$ (Gewicht) zuordnet

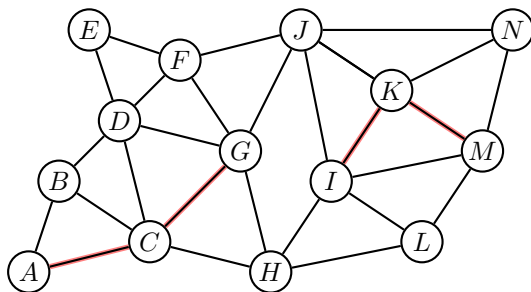
Ein gewichteter Graph heisst *euklidisch*, wenn die Kantengewichte durch die (euklidischen) Distanzen zwischen Punkten in einem Raum definiert werden.

Kantenzüge

- Ein *Kantenzug* (*walk*) ist eine Folge von Knoten/Kanten, bei der aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind; Knoten und Kanten dürfen sich wiederholen.
- Ein *Weg* (*trail*) ist ein Kantenzug, in dem keine Kante mehrfach vorkommt. Knoten dürfen sich wiederholen.
- Ein *Pfad* (*path*) ist ein Kantenzug, in dem keine Knoten mehrfach vorkommt. Damit kommt auch keine Kante mehrfach vor.
- Ein *geschlossener Kantenzug* (*closed walk*) ist ein Kantenzug, dessen erster und letzter Knoten identisch sind.
- Ein *Zyklus* (*cycle*) ist ein geschlossener Pfad: erster = letzter Knoten, alle anderen Knoten verschieden.
- Ein *Kreis* (*circuit*) ist ein geschlossener Weg.

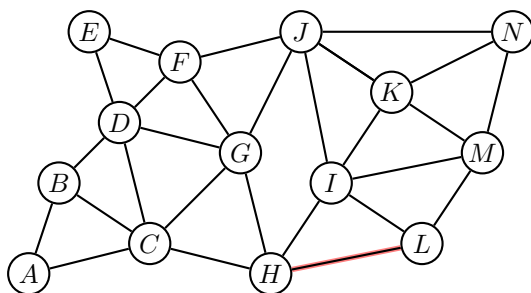
Hinweis zur Terminologie: Die graphentheoretische Terminologie ist in der Literatur nicht vollständig einheitlich. Insbesondere werden die englischen Begriffe *walk*, *trail*, *path*, *cycle* und *circuit* sowie ihre deutschen Entsprechungen teilweise unterschiedlich definiert und übersetzt. Die oben verwendeten Definitionen sind daher als Konvention dieses Textes zu verstehen.

Beispiel 1



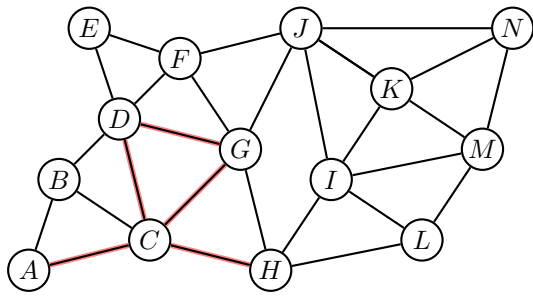
A, C, G, I, K, M ist *kein* Kantenzug.

Beispiel 2



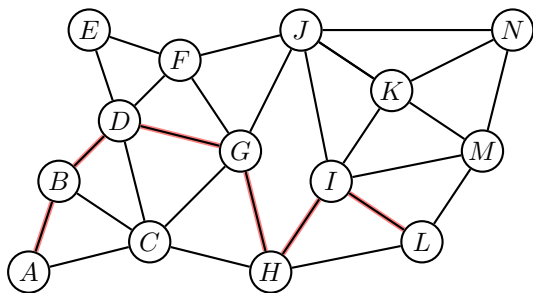
H, L, H, L, H, L ist ein Kantenzug.

Beispiel 3



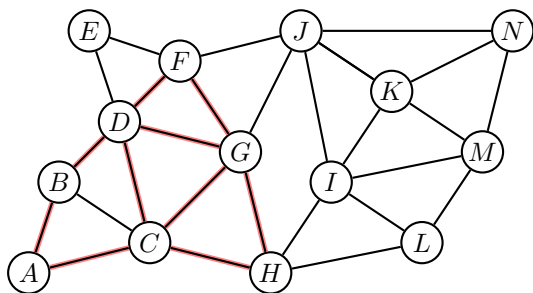
A, C, G, D, C, H ist ein Kantenzug, ein Weg aber kein Pfad.

Beispiel 4



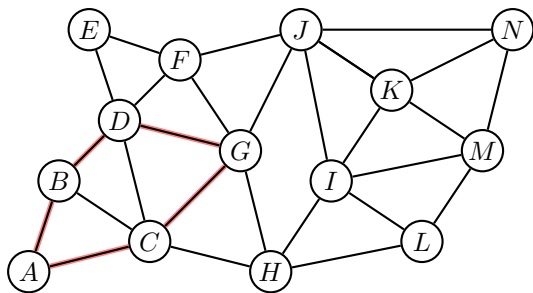
A, B, D, G, H, I, L ist ein Kantenzug, ein Weg und ein Pfad.

Beispiel 5



$A, C, G, D, C, H, G, F, D, B, A$ ist ein (geschlossener) Kantenzug, ein Weg und ein Kreis.

Beispiel 6



A, C, G, D, B, A ist ein (geschlossener) Kantenzug, ein Weg, *kein* Pfad, ein Zyklus und ein Kreis.

Hamiltonkreis

Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der jeden Knoten von G genau einmal besucht.

Bemerkung: Würde man die Bezeichnung *Hamiltonzyklus* für einen Hamiltonkreis verwenden, genügte es (gemäss unserer Terminologie) zu verlangen, dass jeder Knoten von G im Zyklus *enthalten* ist. Dies findet Ausdruck in der englischen Übersetzung *Hamiltonian cycle*. Da die Bezeichnung *Hamiltonkreis* in der deutschen Fachliteratur jedoch etabliert und eindeutig definiert ist, verzichten wir auf eine Umbenennung.

TSP

Travelling-Salesman-Problem (TSP): Gegeben ist ein vollständiger gewichteter Graph. Gesucht ist ein Hamiltonkreis minimaler Gesamtlänge.

Die Brute Force-Lösung des TSP

Input: vollständiger gewichteter Graph $G = (V, E)$

- (1) Wähle v_0 als beliebigen Startknoten.
- (2) Erzeuge alle $(n - 1)!$ Permutationen

$$(v_{p(1)}, v_{p(2)}, \dots, v_{p(n-1)}).$$

der Knoten $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

- (3) Berechne für jede Permutation p die Gesamtlänge des durch die Knotenfolge

$$(v_0, v_{p(1)}, v_{p(2)}, \dots, v_{p(n-1)}, v_0)$$

gegebenen Hamiltonkreises.

- (4) Wähle einen Hamiltonkreis mit minimaler Gesamtlänge.

Output: Ein Hamiltonkreis minimaler Gesamtlänge und seine Länge

Text wird später fortgesetzt ...