

# Das Travelling Salesman Problem

## Theorie

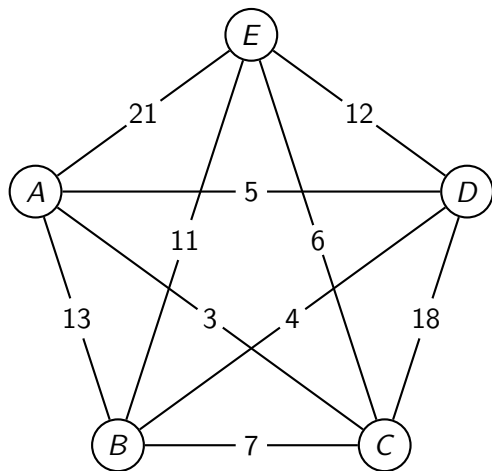
9. September 2026

## Fragestellung

Ein Handelsvertreter soll  $n$  Städte besuchen und wieder in die zuerst besuchte Stadt zurückkehren. Welches ist die kürzeste Route, wenn alle paarweisen Distanzen zwischen jeweils zwei Städten bekannt sind?

## Beispiel

Städtemodell ( $n = 5$ )



# Graphen

Ein *Graph* ist ein Paar  $G = (V, E)$ , bestehend aus

- ▶ einer *Knotenmenge*  $V$  (*vertices*)
- ▶ einer *Kantemenge*  $E$  (*edges*)

In obigen Fall ist der Graph

- ▶ *ungerichtet*, da die Kanten nicht orientiert sind,
- ▶ *vollständig*, da jeder Knoten mit jedem, Knoten durch eine Kante verbunden ist und
- ▶ *gewichtet*, da es eine Funktion  $w$  gibt, die jeder Kante  $(x, y) \in E$  eine reelle Zahl  $w(x, y)$  (Gewicht) zuordnet

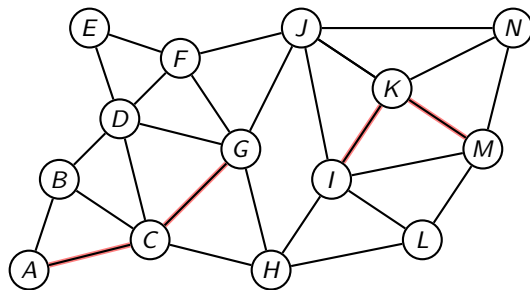
Ein gewichteter Graph heisst *euklidisch*, wenn die Kantengewichte durch die (euklidischen) Distanzen zwischen Punkten in einem Raum definiert werden.

## Kantenzüge

- ▶ Ein *Kantenzug* (*walk*) ist eine Folge von Knoten/Kanten, bei der aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind; Knoten und Kanten dürfen sich wiederholen.
- ▶ Ein *Weg* (*trail*) ist ein Kantenzug, in dem keine Kante mehrfach vorkommt. Knoten dürfen sich wiederholen.
- ▶ Ein *Pfad* (*path*) ist ein Kantenzug, in dem keine Knoten mehrfach vorkommt. Damit kommt auch keine Kante mehrfach vor.
- ▶ Ein *geschlossener Kantenzug* (*closed walk*) ist ein Kantenzug, dessen erster und letzter Knoten identisch sind.
- ▶ Ein *Zyklus* (*cycle*) ist ein geschlossener Pfad: erster = letzter Knoten, alle anderen Knoten verschieden.
- ▶ Ein *Kreis* (*circuit*) ist ein geschlossener Weg.

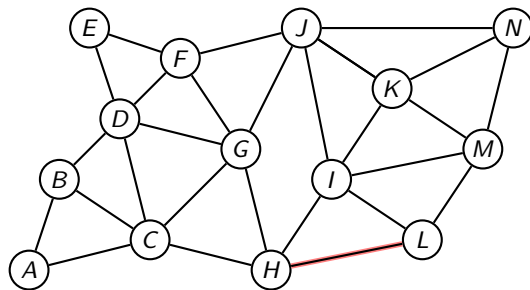
**Hinweis zur Terminologie:** Die graphentheoretische Terminologie ist in der Literatur nicht vollständig einheitlich. Insbesondere werden die englischen

## Beispiel 1



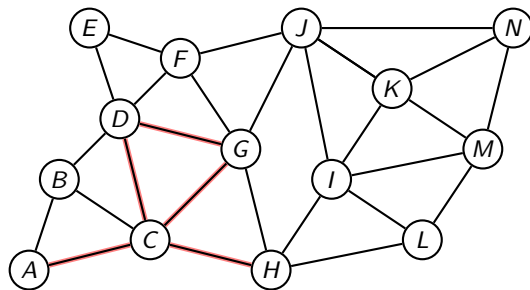
$A, C, G, I, K, M$  ist *kein* Kantenzug.

## Beispiel 2



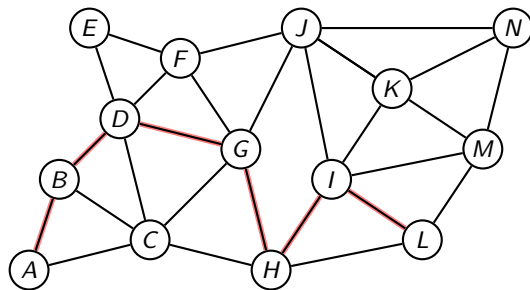
$H, L, H, L, H, L$  ist ein Kantenzug.

## Beispiel 3



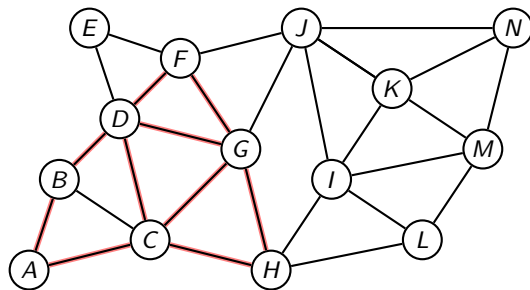
$A, C, G, D, C, H$  ist ein Kantenzug, ein Weg aber kein Pfad.

## Beispiel 4



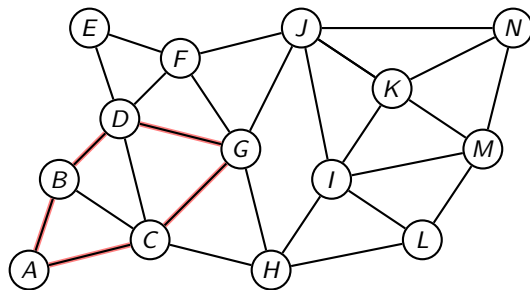
$A, B, D, G, H, I, L$  ist ein Kantenzug, ein Weg und ein Pfad.

## Beispiel 5



$A, C, G, D, C, H, G, F, D, B, A$  ist ein (geschlossener) Kantenzug, ein Weg und ein Kreis.

## Beispiel 6



$A, C, G, D, B, A$  ist ein (geschlossener) Kantenzug, ein Weg, *kein* Pfad, ein Zyklus und ein Kreis.

## Hamiltonkreis

Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist ein Kreis, der jeden Knoten von  $G$  genau einmal besucht.

**Bemerkung:** Würde man die Bezeichnung *Hamiltonzyklus* für einen Hamiltonkreis verwenden, genügte es (gemäss unserer Terminologie) zu verlangen, dass jeder Knoten von  $G$  im Zyklus *enthalten* ist. Dies findet Ausdruck in der englischen Übersetzung *Hamiltonian cycle*. Da die Bezeichnung *Hamiltonkreis* in der deutschen Fachliteratur jedoch etabliert und eindeutig definiert ist, verzichten wir auf eine Umbenennung.

# TSP

Travelling-Salesman-Problem (TSP): Gegeben ist ein vollständiger gewichteter Graph. Gesucht ist ein Hamiltonkreis minimaler Gesamtlänge.

## Die Brute Force-Lösung des TSP

*Input:* vollständiger gewichteter Graph  $G = (V, E)$

- (1) Wähle  $v_0$  als beliebigen Startknoten.
- (2) Erzeuge alle  $(n - 1)!$  Permutationen

$$(v_{p(1)}, v_{p(2)}, \dots, v_{p(n-1)}).$$

der Knoten  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ .

- (3) Berechne für jede Permutation  $p$  die Gesamtlänge des durch die Knotenfolge

$$(v_0, v_{p(1)}, v_{p(2)}, \dots, v_{p(n-1)}, v_0)$$

gegebenen Hamiltonkreises.

- (4) Wähle einen Hamiltonkreis mit minimaler Gesamtlänge.

*Output:* Ein Hamiltonkreis minimaler Gesamtlänge und seine Länge

Text wird später fortgesetzt ...