MST-Heuristik für das TSP

Visualisierung der 2-Approximation

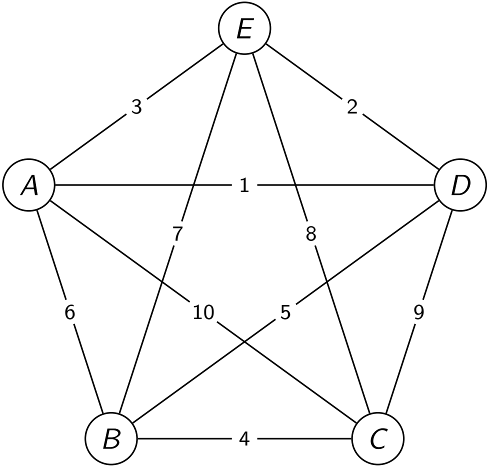
Die MST-Heuristik für das TSP

Gegeben ist ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit einer metrischen Distanzfunktion $D\colon V \times V \to \mathbb{R}_0^+$. Dann führe die folgenden beiden Schritte durch:

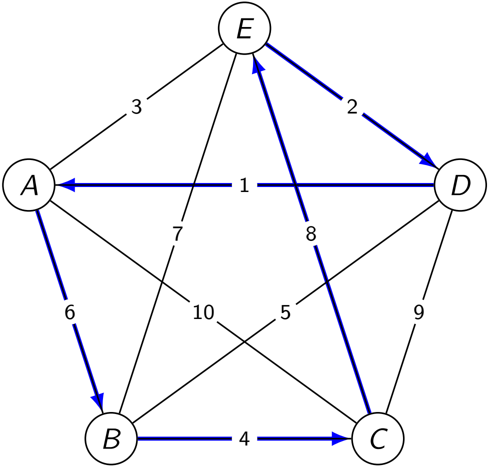
1. Bestimme einen minimalen Spannbaum T von G. Dafür kann beispielsweise der Algorithmus von Prim oder der Algorithmus von Kruskal verwendet werden.
2. Wähle einen Startknoten $v_0 \in V$, führe von dort eine Tiefensuche auf T aus, ordne die Knoten in der Reihenfolge, in der sich besucht werden und verbinde den zuletzt besuchten Knoten mit v_0. Auf diese Weise entsteht ein Hamiltonkreis H.

Satz. Der oben konstruierte Hamiltonkreis H kann in polynomieller Zeit berechnet werden und ist höchstens doppelt so lang, wie eine optimale Lösung H_{opt} für das metrische TSP.

Das Beispiel-TSP



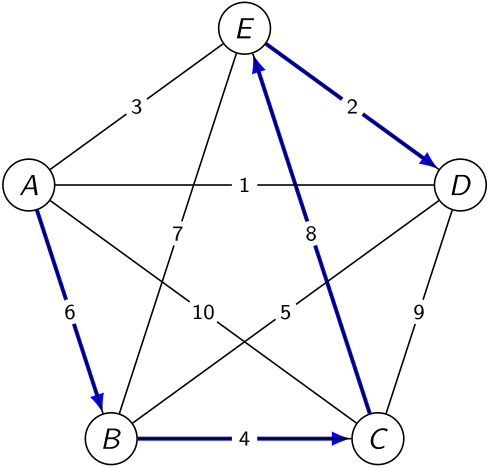
Eine optimale Lösung



Hamiltonkreis H_{opt}: $A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{8} E \xrightarrow{2} D \xrightarrow{1} A$

$\text{cost}(H_{\text{opt}}) = 21$

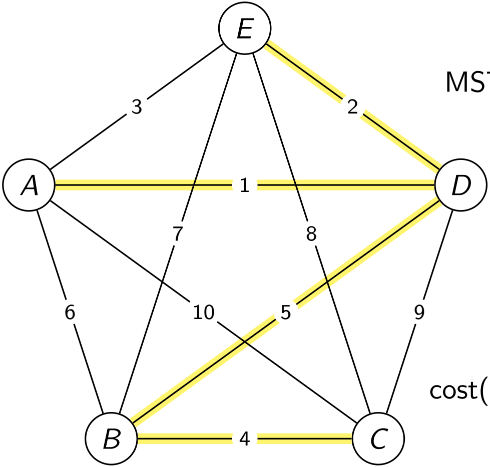
Entferne willkürlich die Kante $\{D, A\}$



Wir erhalten einen Spannbaum S: $A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{8} E \xrightarrow{2} D$

Somit gilt: $\underbrace{\text{cost}(H_{\text{opt}})}_{21} \geq \underbrace{\text{cost}(S)}_{20}$

Bestimme einen minimalen Spannbaum T



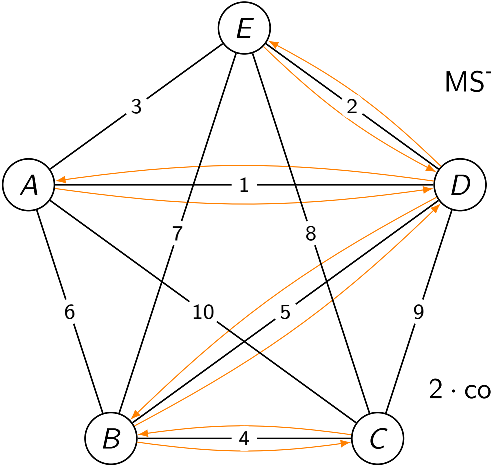
MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$\text{cost}(T) = 1 + 2 + 5 + 4 = 12$

T ist ein minimaler Spannbaum und somit nicht länger als der Spannbaum S. Also gilt: $\underbrace{\text{cost}(H_{\text{opt}})}_{21} \geq \underbrace{\text{cost}(S)}_{20} \geq \underbrace{\text{cost}(T)}_{12} \quad (*)$

Verdopple jede Kante des minimalen Spannbaums T



MST T:

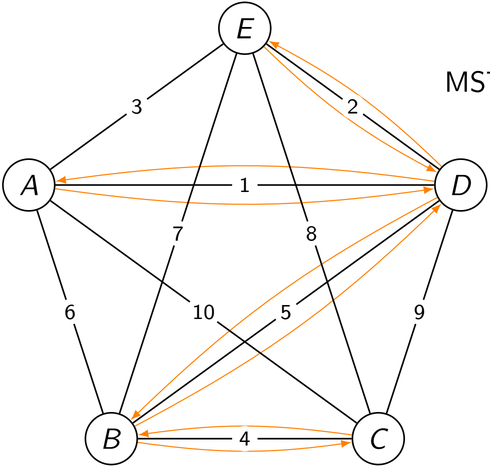
A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$$2 \cdot \mathrm{cost}(T) = 24$$

Wegen der Monotonie in der Ungleichungskette $(*)$ gilt:

$$\underbrace{2 \cdot \mathrm{cost}(H_{\mathrm{opt}})}_{42} \geq \underbrace{2 \cdot \mathrm{cost}(S)}_{40} \geq \underbrace{2 \cdot \mathrm{cost}(T)}_{24}$$

Die letzte Abschätzung

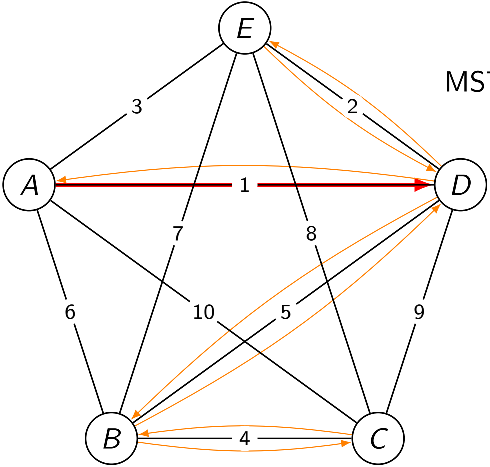


MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

Wir zeigen nun exemplarisch, dass der von der Tiefensuche im MST konstruierte Pfad plus Rückkehr zum Startknoten (A) nicht länger als die doppelte Länge des minimalen Spannbaums ist.

Tiefensuche auf T mit Start in A

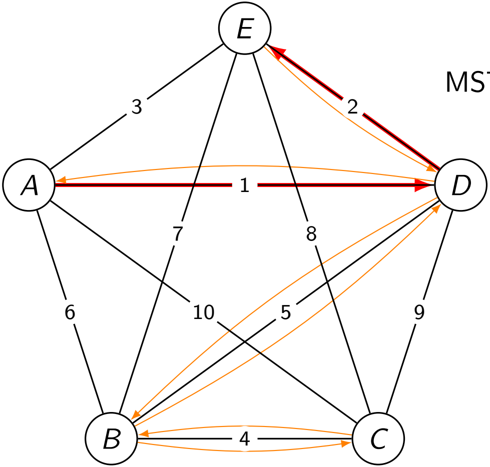


MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$A \xrightarrow{1} D$

Tiefensuche auf T mit Start in A

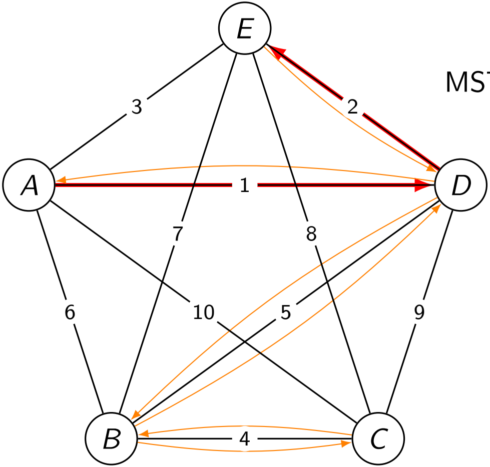


MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E$

Tiefensuche auf T mit Start in A



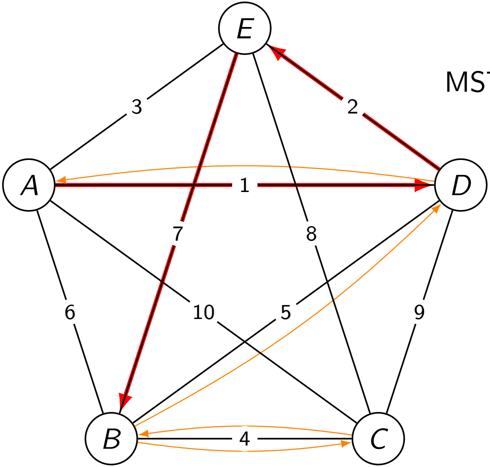
MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E$

d ist metrisch: $d(E,B) \leq d(E,D) + d(D,B)$

Tiefensuche auf T mit Start in A

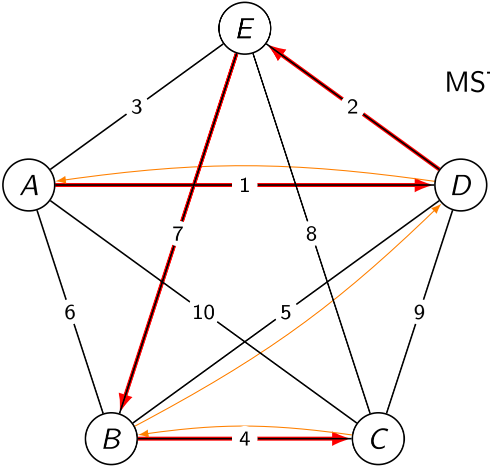


MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{7} B$$

Tiefensuche auf T mit Start in A

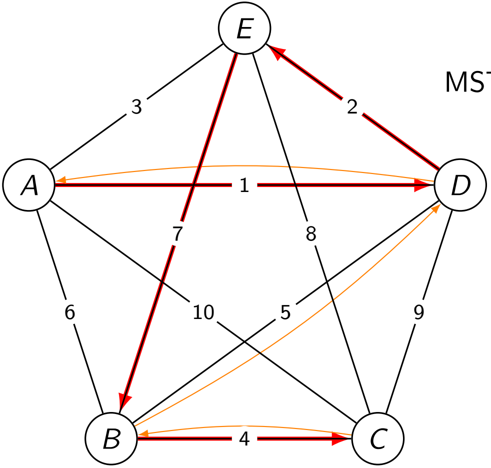


MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{4} C$

Tiefensuche auf T mit Start in A



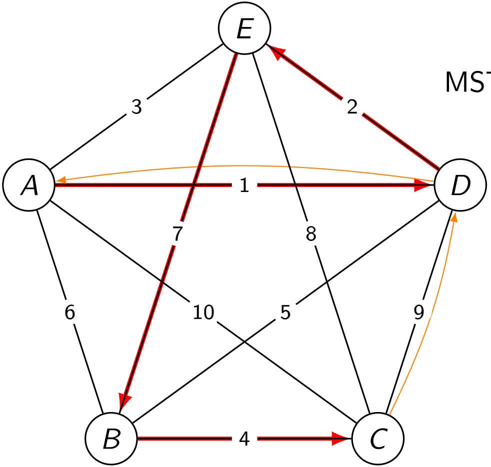
MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{4} C$

d ist metrisch: $d(C, D) \leq d(C, B) + d(B, D)$

Tiefensuche auf T mit Start in A

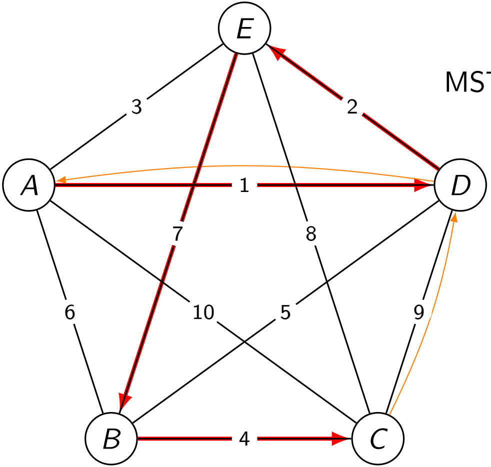


MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{4} C$

Tiefensuche auf T mit Start in A



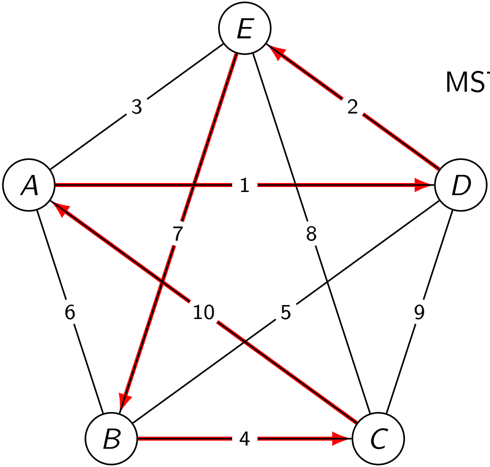
MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

$$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{4} C$$

d ist metrisch: $d(C, A) \leq d(C, D) + d(D, A)$

Tiefensuche auf T mit Start in A



MST T:

A	D
B	D, C
C	B
D	A, E, B
E	D

Hamiltonkreis H: $A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{10} A$

insgesamt: $\underbrace{2 \cdot \mathrm{cost}(H_{\mathrm{opt}})}_{42} \geq \underbrace{2 \cdot \mathrm{cost}(S)}_{40} \geq \underbrace{2 \cdot \mathrm{cost}(T)}_{24} \geq \underbrace{\mathrm{cost}(H)}_{24}$