Permutationen

Übungen

Aufgabe 1

Notiere die Permutation p in vereinfachter Zyklendarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 8 & 2 & 11 & 12 & 5 & 4 & 1 & 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 8 & 2 & 11 & 12 & 5 & 4 & 1 & 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Notiere die Permutation p in vereinfachter Zyklendarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 10 & 2 & 6 & 9 & 5 & 3 & 1 & 11 \\ 9 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 11 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$p = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 10 & 2 & 6 & 9 & 5 & 3 & 1 & 11 \\ 9 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 11 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Stelle die Zyklendarstellung der Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, 10$ in der Zweizeilenform dar.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 6 & 10 & 1 & 7 & 4 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Permutationen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne damit

(a) $q \circ p =$

(b) $p \circ q =$

Aufgabe 4

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Permutation $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechne damit

(a) $p^2 = p \circ p =$

(b) $p^3 =$

(c) $p^4 =$

(d) $p^5 =$

(e) $p^{99} =$

Aufgabe 5

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) $p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $p^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $p^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $p^{99} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Da die Potenzgesetze auch für das Verketten von Permutationen gelten und alle Faktoren identisch sind, lässt sich p^n effizient mit $p^{n-1} \circ p$ oder $p \circ p^{n-1}$ berechnen.

Aufgabe 6

Gegeben sind alle Permutationen von 3 Elementen:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vervollständige damit die Verkettungstabelle, wobei jeweils das Element in der 1. Kolonnen mit dem Element in der 1. Zeile verknüpft wird. Beispiel: $h \circ g = j$

$\circ$	e	f	g	h	i	j
e						
f						
g				j		
h						
i						
j						

Aufgabe 6

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\circ$	e	f	g	h	i	j
e	e	f	g	h	i	j
f	f	g	e	i	j	h
g	g	e	f	j	h	i
h	h	j	i	e	g	f
i	i	h	j	f	e	g
j	j	i	h	g	f	e

Aufgabe 7

Bestimme zur gegebenen Permutation p ihre Inverse p^{-1}. Dies ist die Permutation mit der Eigenschaft

$$p^{-1} \circ p = p \circ p^{-1} = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Bestimme zur gegebenen Permutation p die Anzahl ihrer Inversionen, d. h. die Anzahl der Paare permutierter Elemente, bei denen die Schlüssel und Werte jeweils unterschiedlich sortiert sind

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{inv}(p) = 1$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{inv}(p) = 3$

(c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{inv}(p) = 7$

(d) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{inv}(p) = 0$

Aufgabe 9

Bestimme die Anzahl der Nullen, die am rechten Ende von 64! stehen.

Beispiel: $12! = 479\,001\,600$ endet mit 2 Nullen.

Hinweis: Ein Produkt aus zwei oder mehr Zahlen hat genau so viele Nullen am Ende, wie Paare aus den Faktoren 2 und 5 darin vorkommen. Da in $12! = 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ alle sechs geraden Faktoren mindestens einmal den Faktor 2, aber nur die zwei Faktoren 10 und 5 genau einmal durch 5 teilbar sind, bestimmt die Anzahl der Fünfen, die in den Faktoren enthalten sind, die Anzahl der Nullen, auf die 12! endet.

Aufgabe 9

In 64! sind folgende Faktoren einmal durch 5 teilbar:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60.

Diese Faktoren sind noch ein zweites Mal durch 5 teilbar:

25, 50.

Somit kommt der Faktor 5 insgesamt 14 Mal in 64! vor, weshalb 14 Nullen am Ende von 64! stehen.

Aufgabe 10

Berechne $\dfrac{226!}{225!}$.

Aufgabe 10

$$\frac{226!}{225!} = \frac{226 \cdot 225!}{225!} = 226$$

Aufgabe 11

Vereinfache $\dfrac{n!}{(n-2)!}$.

Aufgabe 11

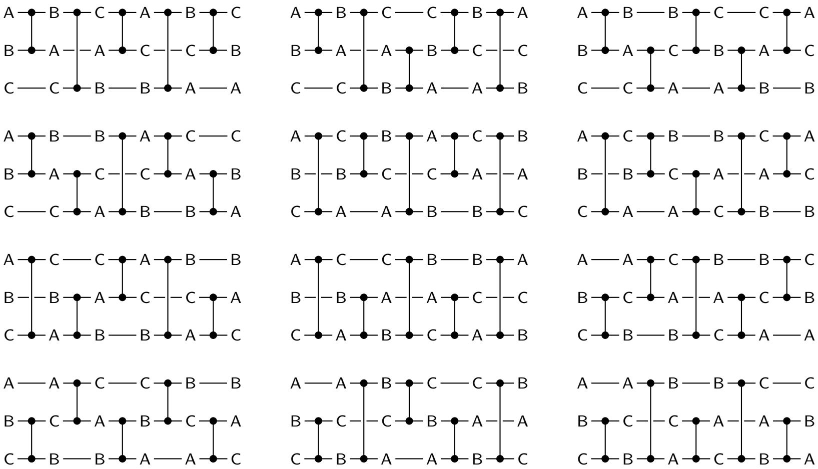
$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

Aufgabe 12

Gib möglichst viele Permutationsnetzwerke an, welche alle Permutationen von drei Elementen A, B, C erzeugen.

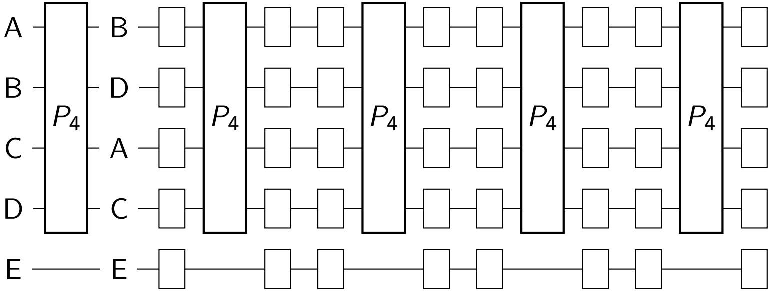
Aufgabe 12

Es gibt insgesamt 12 Lösungen.

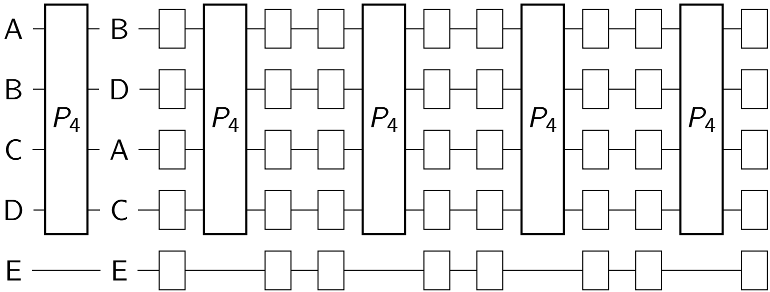


Aufgabe 13

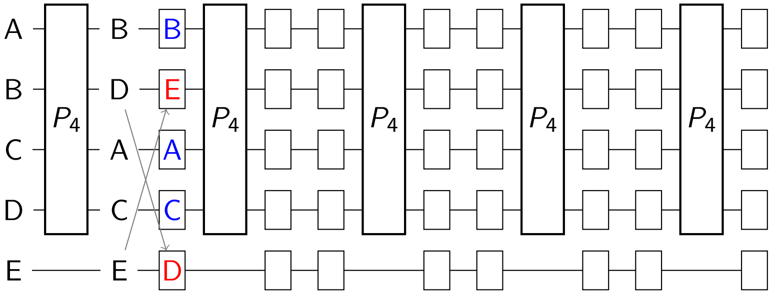
Zeichne das Vertauschungsnetzwerk der 5 Elemente $M = \{A, B, C, D, E\}$ mit absteigendem letzten Element, indem du die (Black) Box P_4 für eine Permutation von 4 Elementen verwendest.



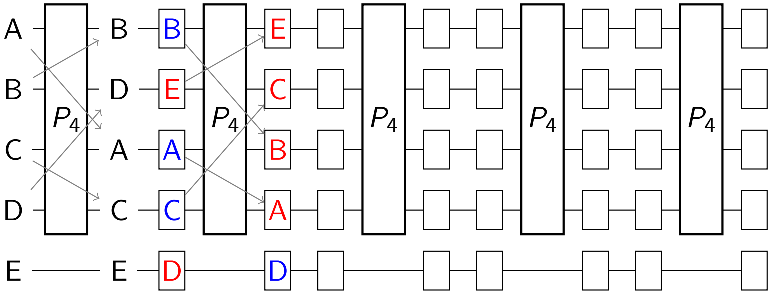
Aufgabe 13



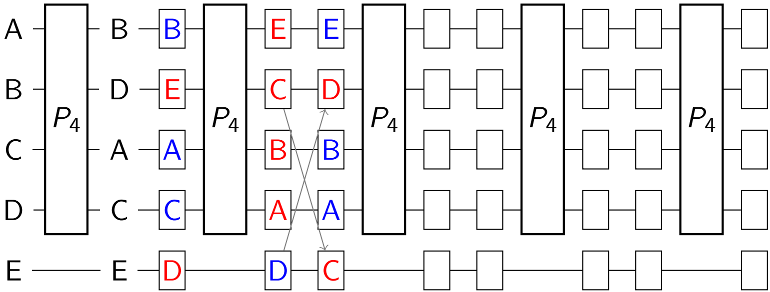
Aufgabe 13



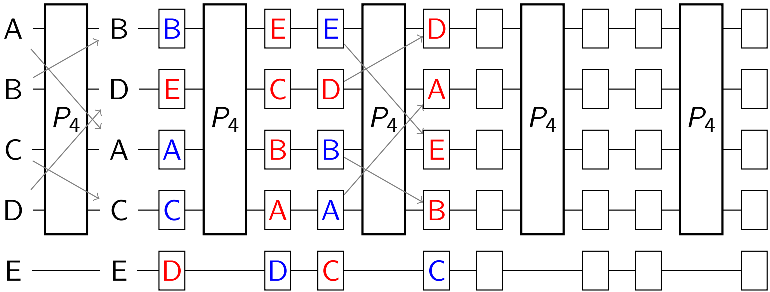
Aufgabe 13



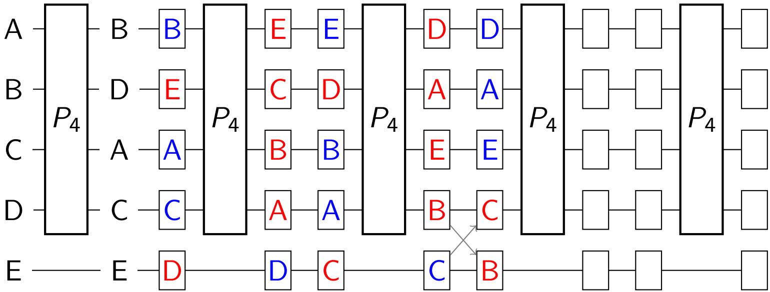
Aufgabe 13



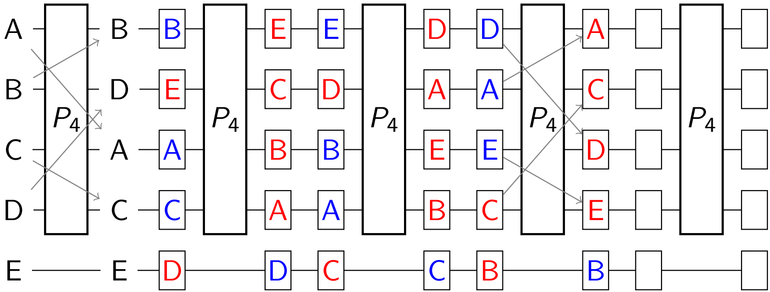
Aufgabe 13



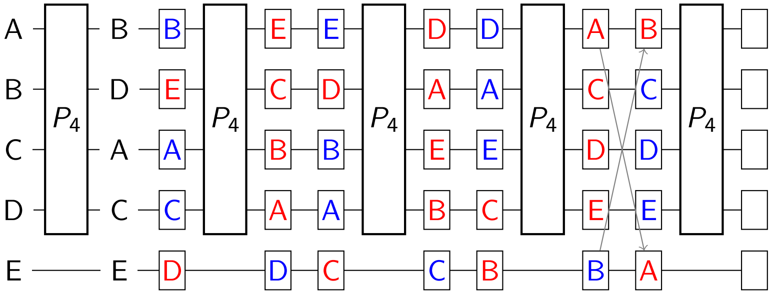
Aufgabe 13



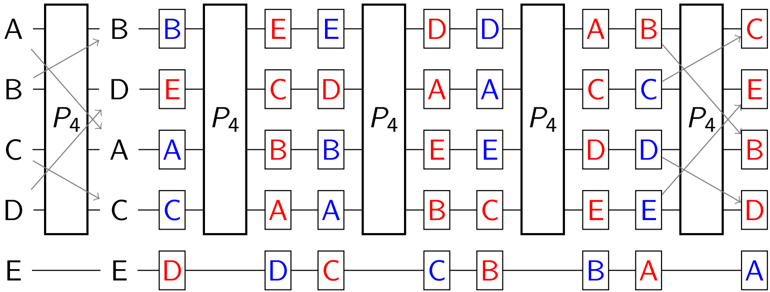
Aufgabe 13



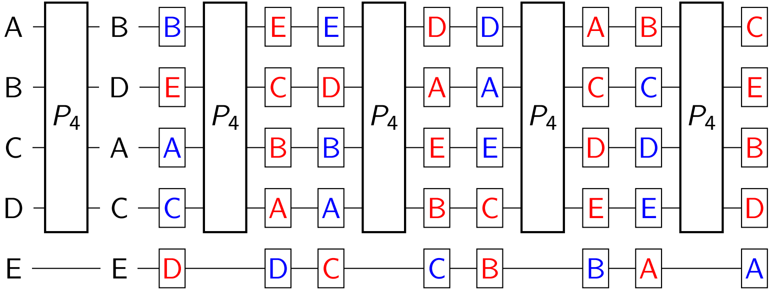
Aufgabe 13



Aufgabe 13


A B C D E
P4
B D A C E
B E A C D
P4
E C B A D
E D B A C
P4
D A E B C
D A E C B
P4
A C D E B
B C D E A
P4
C E B D A

Aufgabe 13


A B C D E
P_4
B D A C E
B E A C D
P_4
E C B A D
E D B A C
P_4
D A E B C
D A E C B
P_4
A C D E B
B C D E A
P_4
C E B D A

Aufgabe 14

Erstelle analog zur Seite 5 in den Theorieunterlagen eine Tabelle, welche für $n = 2, 3, \ldots, 9$ die Positionen i angibt, die im Algorithmus von Heap jeweils mit der Position n vertauscht werden.

n	$T(n,i)$
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Aufgabe 14

n	$T(n,i)$							
2	1							
3	1	1						
4	1	2	3					
5	1	1	1	1				
6	1	2	3	4	5			
7	1	1	1	1	1	1		
8	1	2	3	4	5	6	7	
9	1	1	1	1	1	1	1	1

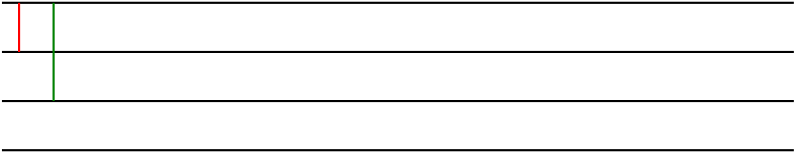
Aufgabe 15

Zeige in Form eines Permutationsnetzwerks, wie der Algorithmus von Heap in 23 Schritten die vier Elemente der Menge $M = \{A, B, C, D\}$ permutiert. Aus Platzgründen ist ein A4-Blatt im Querformat oder ein vorbereitetes Raster sinnvoll.

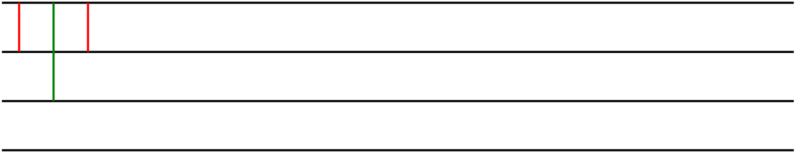
Aufgabe 15

Aufgabe 15

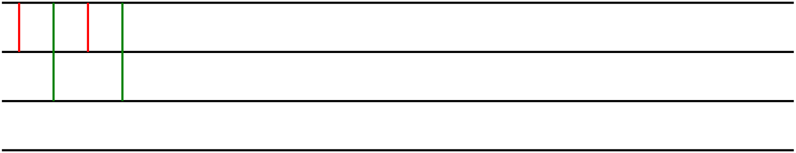
Aufgabe 15



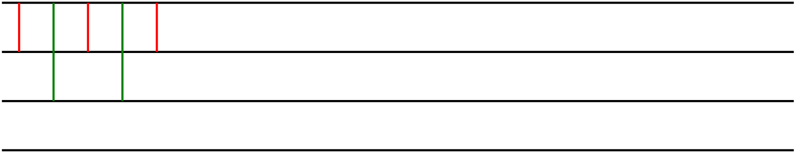
Aufgabe 15



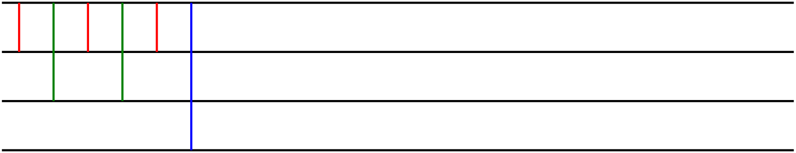
Aufgabe 15



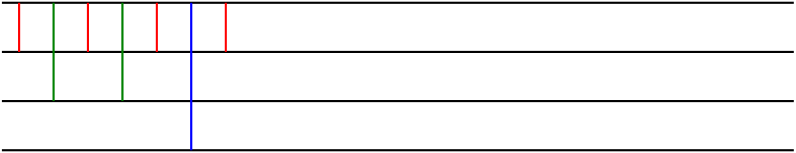
Aufgabe 15



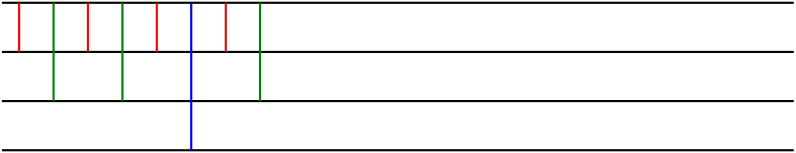
Aufgabe 15



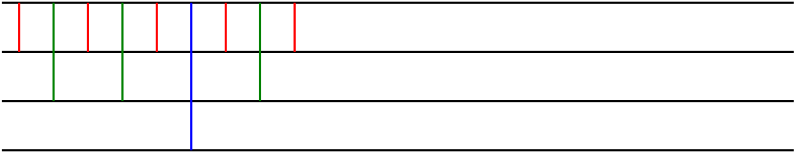
Aufgabe 15



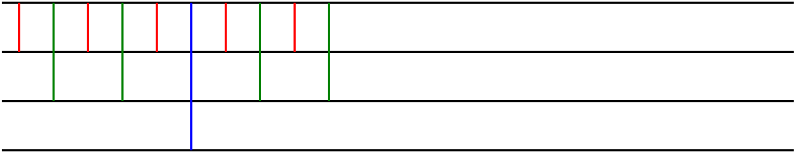
Aufgabe 15



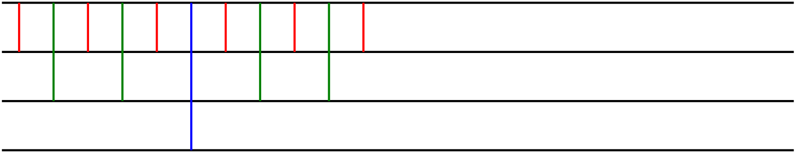
Aufgabe 15



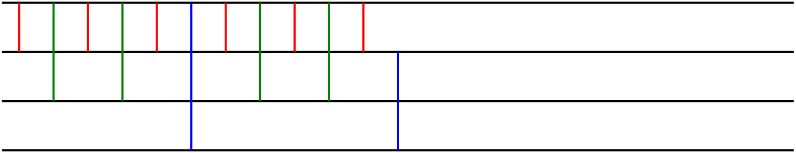
Aufgabe 15



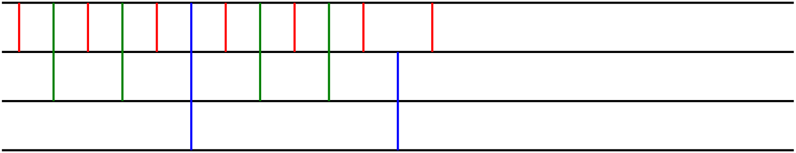
Aufgabe 15



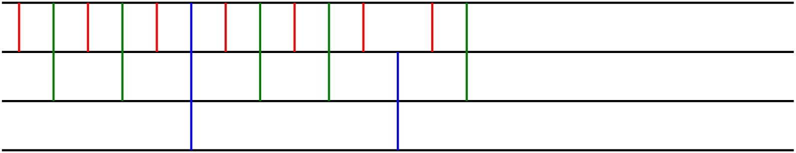
Aufgabe 15



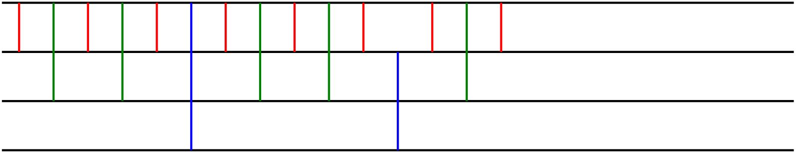
Aufgabe 15



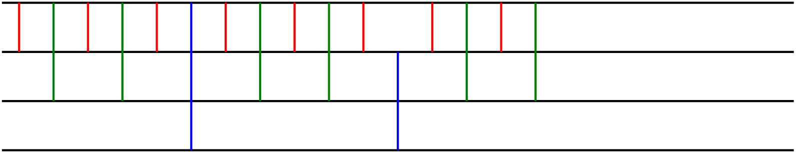
Aufgabe 15



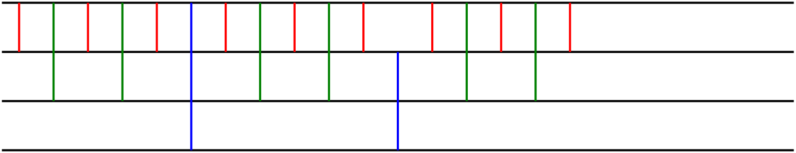
Aufgabe 15



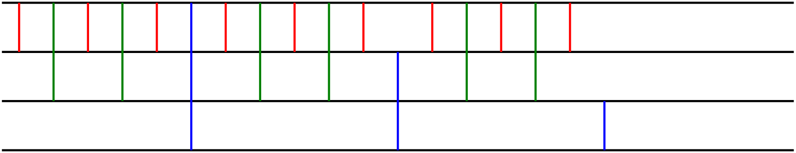
Aufgabe 15



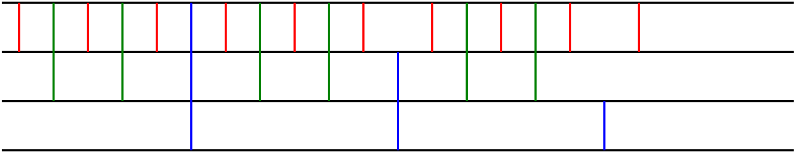
Aufgabe 15



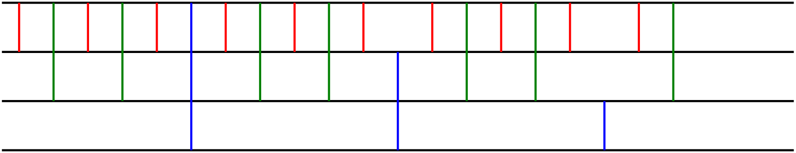
Aufgabe 15



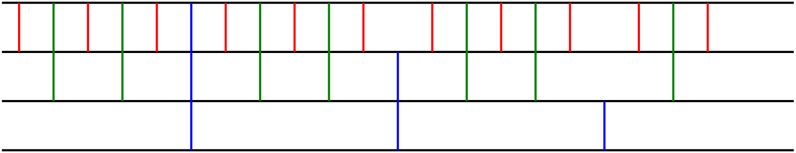
Aufgabe 15



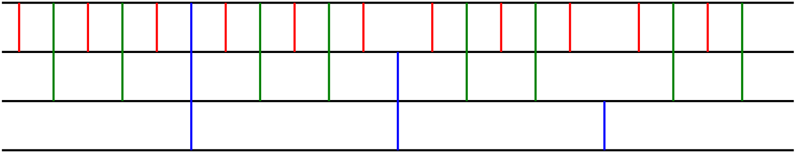
Aufgabe 15



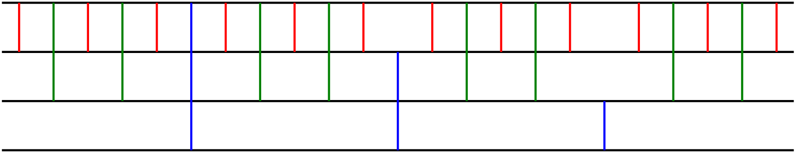
Aufgabe 15



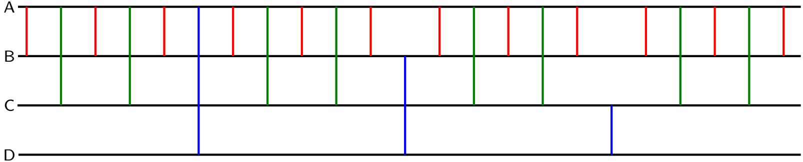
Aufgabe 15



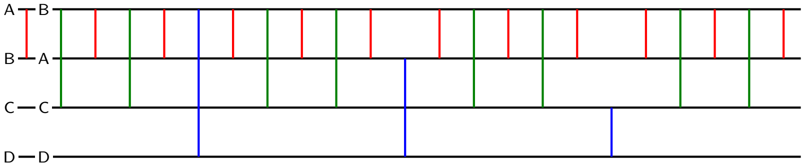
Aufgabe 15



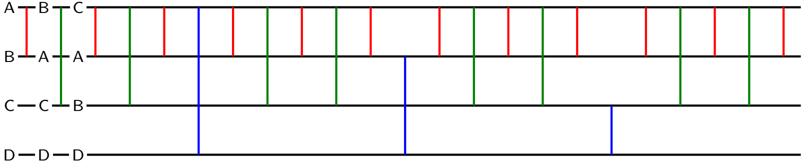
Aufgabe 15



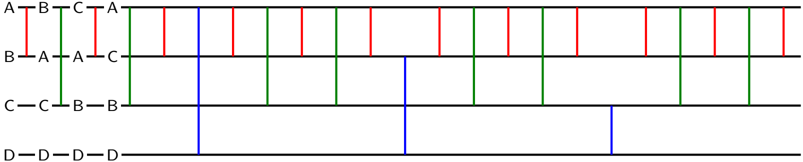
Aufgabe 15



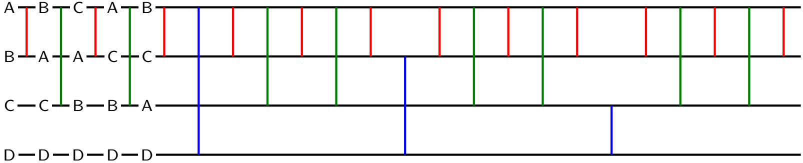
Aufgabe 15



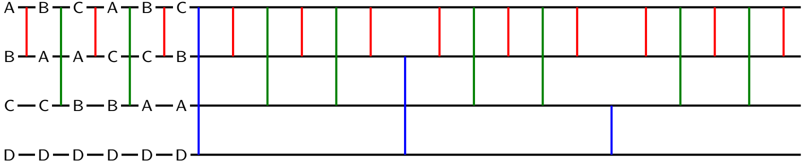
Aufgabe 15



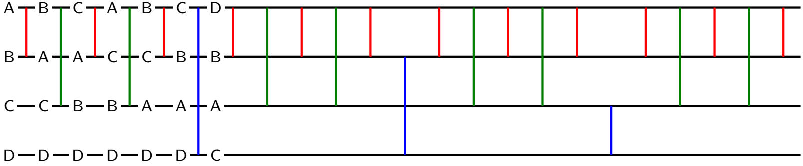
Aufgabe 15



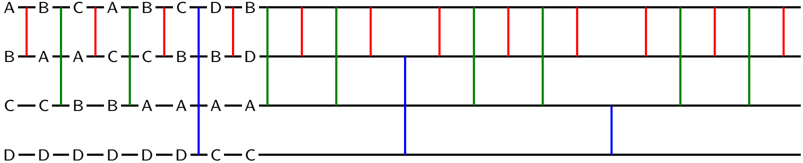
Aufgabe 15



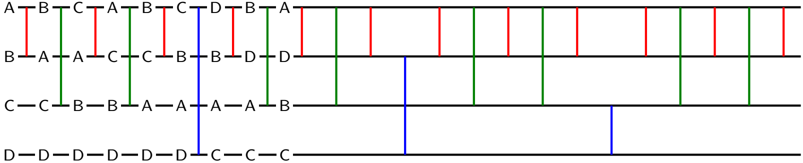
Aufgabe 15



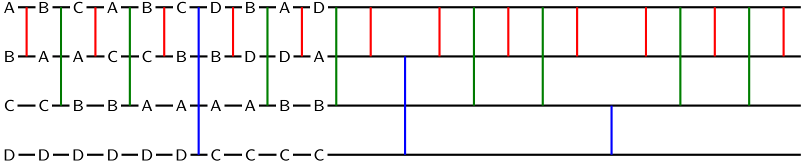
Aufgabe 15



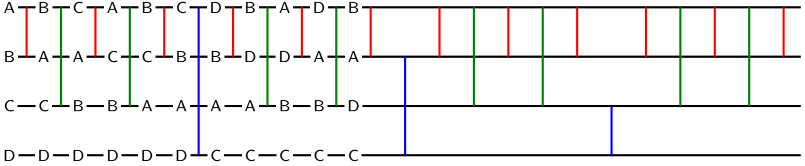
Aufgabe 15



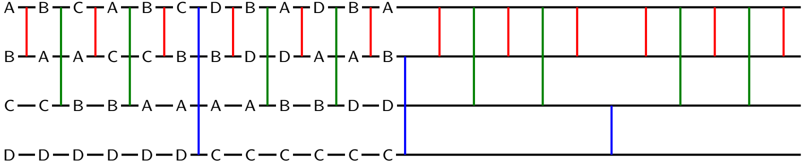
Aufgabe 15



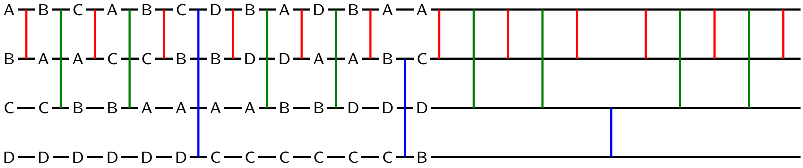
Aufgabe 15



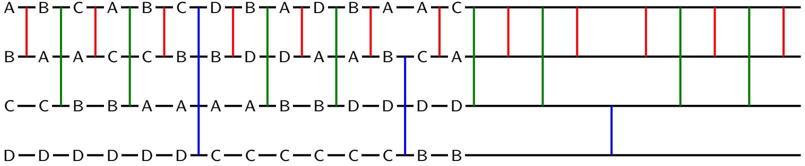
Aufgabe 15



Aufgabe 15

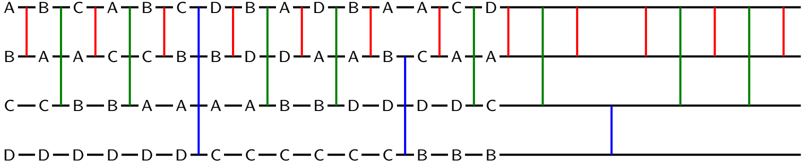

A B C A B C D B A D B A A
B A A C C B B D D A A B C
C C B B A A A A B B D D D
D D D D D D C C C C C C B

Aufgabe 15

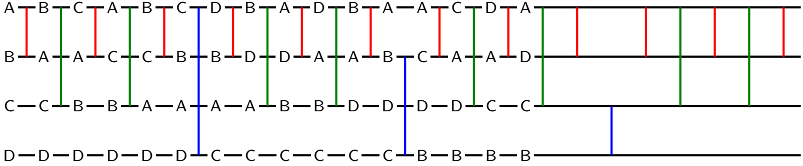


A B C A B C D B A D B A A C
B A A C C B B D D A A B C A
C C B B A A A A B B D D D D
D D D D D D C C C C C C B B

Aufgabe 15

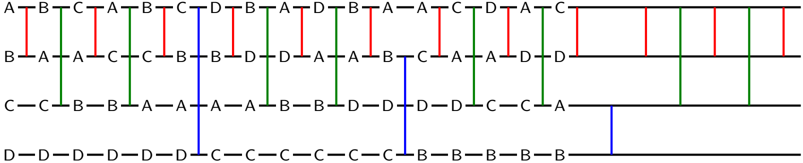

A B C A B C D B A D B A A C D
B A A C C B B D D A A B C A A
C C B B A A A A B B D D D D C
D D D D D D C C C C C C B B B

Aufgabe 15

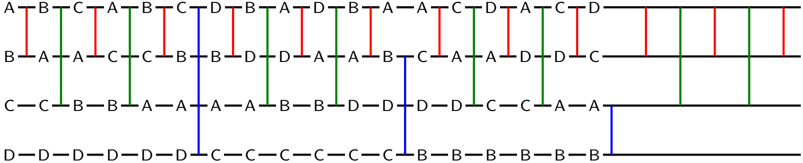


A B C A B C D B A D B A A C D A
B A A C C B B D D A A B C A A D
C C B B A A A A B B D D D D C C
D D D D D D C C C C C C B B B B

Aufgabe 15

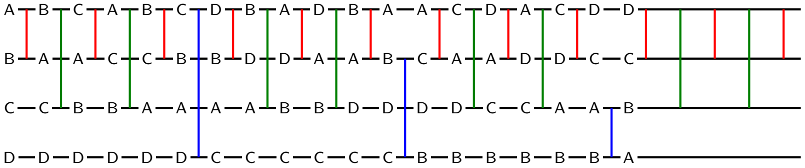

A B C A B C D B A D B A A C D A C
B A A C C B B D D A A B C A A D D
C C B B A A A A B B D D D D C C A
D D D D D D C C C C C C B B B B B

Aufgabe 15

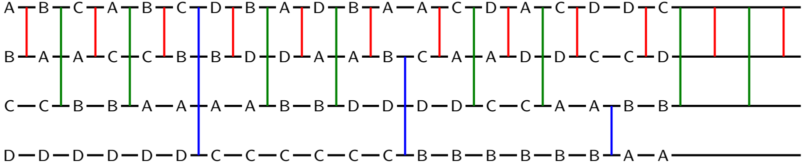


A B C A B C D B A D B A A C D A C D
B A A C C B B D D A A B C A A D D C
C C B B A A A A B B D D D D C C A A
D D D D D D C C C C C C B B B B B B

Aufgabe 15

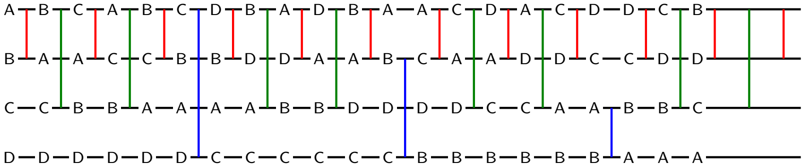

A B C A B C D B A D B A A C D A C D D
B A A C C B B D D A A B C A A D D C C
C C B B A A A A B B D D D D C C A A B
D D D D D D C C C C C C B B B B B B A

Aufgabe 15

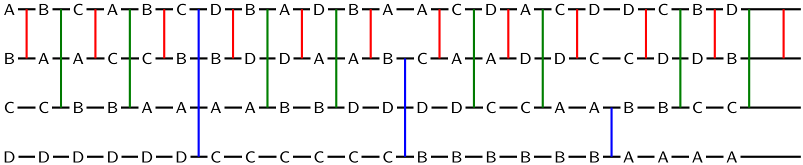


A B C A B C D B A D B A A C D A C D D C
B A A C C B B D D A A B C A A D D C C D
C C B B A A A A B B D D D D C C A A B B
D D D D D D C C C C C C B B B B B B A A

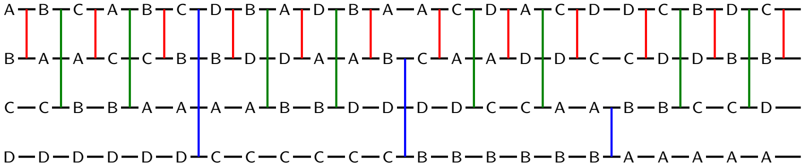
Aufgabe 15


A B C A B C D B A D B A A C D A C D D C B
B A A C C B B D D A A B C A A D D C C D D
C C B B A A A A B B D D D D C C A A B B C
D D D D D D C C C C C C B B B B B B A A A

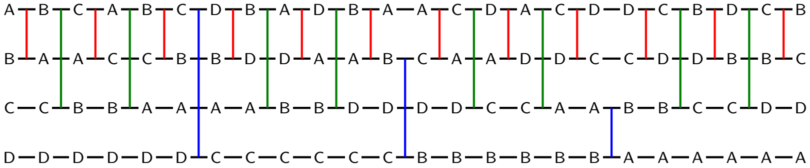
Aufgabe 15


A B C A B C D B A D B A A C D A C D D C B D
B A A C C B B D D A A B C A A D D C C D D B
C C B B A A A A B B D D D D C C A A B B C C
D D D D D D C C C C C C B B B B B B A A A A

Aufgabe 15


A B C A B C D B A D B A A C D A C D D C B D C
B A A C C B B D D A A B C A A D D C C D D B B
C C B B A A A A B B D D D D C C A A B B C C D
D D D D D D C C C C C C B B B B B B A A A A A

Aufgabe 15


A B C A B C D B A D B A A C D A C D D C B D C B
B A A C C B B D D A A B C A A D D C C D D B B C
C C B B A A A A B B D D D D C C A A B B C C D D
D D D D D D C C C C C C B B B B B B A A A A A A

Aufgabe 16

Schreibe mit Hilfe des Pseudocodes in den Theorieunterlagen eine rekursive Python-Funktion `heap(L, k)`, welche alle Permutationen der Liste `L` mit `k` Elementen mit dem Verfahren von Heap ausgibt.

Aufgabe 16

```python
def heap(L, k):
    '''Gibt alle Permutationen der k Elemente der Liste L aus.'''
    if k == 1:
        print(L)
    else:
        heap(L, k-1)
        for i in range(0, k-1):
            if k % 2 == 1:
                L[0], L[k-1] = L[k-1], L[0]
            else:
                L[i], L[k-1] = L[k-1], L[i]
            heap(L, k-1)

# Test
L = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E']
heap(L, len(L))
```