Aufgabe 1

Notiere die Permutation p in vereinfachter Zyklendarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 8 & 2 & 11 & 12 & 5 & 4 & 1 & 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Notiere die Permutation p in vereinfachter Zyklendarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 10 & 2 & 6 & 9 & 5 & 3 & 1 & 11 \\ 9 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 11 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Stelle die Zyklendarstellung der Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, 10$ in der Zweizeilenform dar.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Permutationen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne damit

(a) $q \circ p =$

(b) $p \circ q =$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Permutation $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechne damit

(a) $p^2 = p \circ p =$

(b) $p^3 =$

(c) $p^4 =$

(d) $p^5 =$

(e) $p^{99} =$

Aufgabe 6

Gegeben sind alle Permutationen von 3 Elementen:

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Vervollständige damit die Verkettungstabelle, wobei jeweils das Element in der 1. Kolonnen mit dem Element in der 1. Zeile verknüpft wird. Beispiel: $h \circ g = j$

$\circ$	e	f	g	h	i	j
e						
f						
g				j		
h						
i						
j						

Aufgabe 7

Bestimme zur gegebenen Permutation p ihre Inverse p^{-1}. Dies ist die Permutation mit der Eigenschaft

$$p^{-1} \circ p = p \circ p^{-1} = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Bestimme zur gegebenen Permutation p die Anzahl ihrer Inversionen, d. h. die Anzahl der Paare permutierter Elemente, bei denen die Schlüssel und Werte jeweils unterschiedlich sortiert sind

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Bestimme die Anzahl der Nullen, die am rechten Ende von 64! stehen.

Beispiel: $12! = 479\,001\,600$ endet mit 2 Nullen.

Hinweis: Ein Produkt aus zwei oder mehr Zahlen hat genau so viele Nullen am Ende, wie Paare aus den Faktoren 2 und 5 darin vorkommen. Da in $12! = 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ alle sechs geraden Faktoren mindestens einmal den Faktor 2, aber nur die zwei Faktoren 10 und 5 genau einmal durch 5 teilbar sind, bestimmt die Anzahl der Fünfen, die in den Faktoren enthalten sind, die Anzahl der Nullen, auf die 12! endet.

Aufgabe 10

Berechne $\frac{226!}{225!}$.

Aufgabe 11

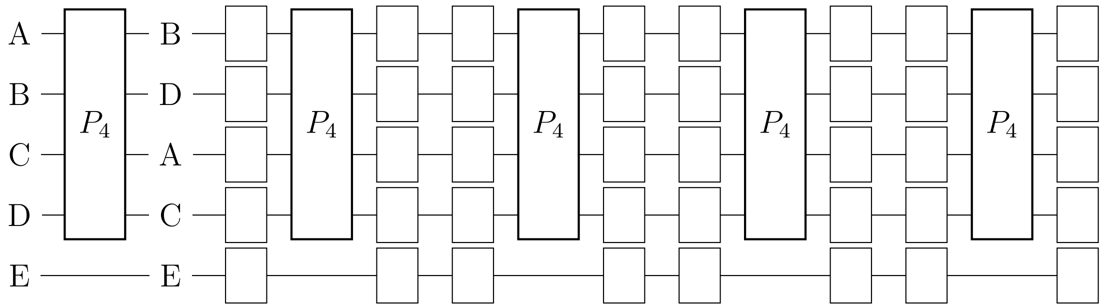
Vereinfache $\frac{n!}{(n-2)!}$.

Aufgabe 12

Gib möglichst viele Permutationsnetzwerke an, welche alle Permutationen von drei Elementen A, B, C erzeugen.

Aufgabe 13

Zeichne das Vertauschungsnetzwerk der 5 Elemente $M = \{A, B, C, D, E\}$ mit absteigendem letzten Element, indem du die (Black) Box P_4 für eine Permutation von 4 Elementen verwendest.



Aufgabe 14

Erstelle analog zur Seite 5 in den Theorieunterlagen eine Tabelle, welche für $n = 2, 3, \ldots, 9$ die Positionen i angibt, die im Algorithmus von Heap jeweils mit der Position n vertauscht werden.

n	$T(n, i)$
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Aufgabe 15

Zeige in Form eines Permutationsnetzwerks, wie der Algorithmus von Heap in 23 Schritten die vier Elemente der Menge $M = \{A, B, C, D\}$ permutiert. Aus Platzgründen ist ein A4-Blatt im Querformat oder ein vorbereitetes Raster sinnvoll.

Aufgabe 16

Schreibe mit Hilfe des Pseudocodes in den Theorieunterlagen eine rekursive Python-Funktion `heap(L, k)`, welche alle Permutationen der Liste `L` mit `k` Elementen mit dem Verfahren von Heap ausgibt.