Erzeugung von Permutationen mit „Next Permutation“

1. Was ist eine Permutation

Eine *n*-stellige Permutation ist eine bestimmte Anordnung von n Elementen.

Formal: Sei $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Menge mit n Elementen. Dann ist eine n-stellige Permutation eine bijektive (eineindeutige) Abbildung

$$\pi : M \to M$$

die jedem Element der Menge ein Element der gleichen Menge zuordnet.

Betrachten wir zum Beispiel die drei Elemente $(1, 2, 3)$. Eine mögliche Permutation ist (2,3,1) und eine andere ist $(3, 1, 2)$.

2. Darstellung von Permutationen

- In der Zweizeilenform stehen in der oberen Zeile die Elemente $1, 2, \ldots, n$ in aufsteigender Reihenfolge während darunter die Elemente stehen, auf die sie abgebildet werden.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Darstellung von Permutationen

- In der Zweizeilenform stehen in der oberen Zeile die Elemente $1, 2, \ldots, n$ in aufsteigender Reihenfolge während darunter die Elemente stehen, auf die sie abgebildet werden.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- In der Tupelschreibweise denken wir uns die obere (sortierte) Zeile und notieren nur die untere Zeile der Zweizeilenform.

$$\pi = (5 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 4 \quad 3)$$

2. Darstellung von Permutationen

- In der Zweizeilenform stehen in der oberen Zeile die Elemente $1, 2, \ldots, n$ in aufsteigender Reihenfolge während darunter die Elemente stehen, auf die sie abgebildet werden.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- In der Tupelschreibweise denken wir uns die obere (sortierte) Zeile und notieren nur die untere Zeile der Zweizeilenform.

$$\pi = (5 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 4 \quad 3)$$

- In der Zyklenschreibweise fassen wir diejenigen Elemente zusammen, die einen Zyklus bilden.

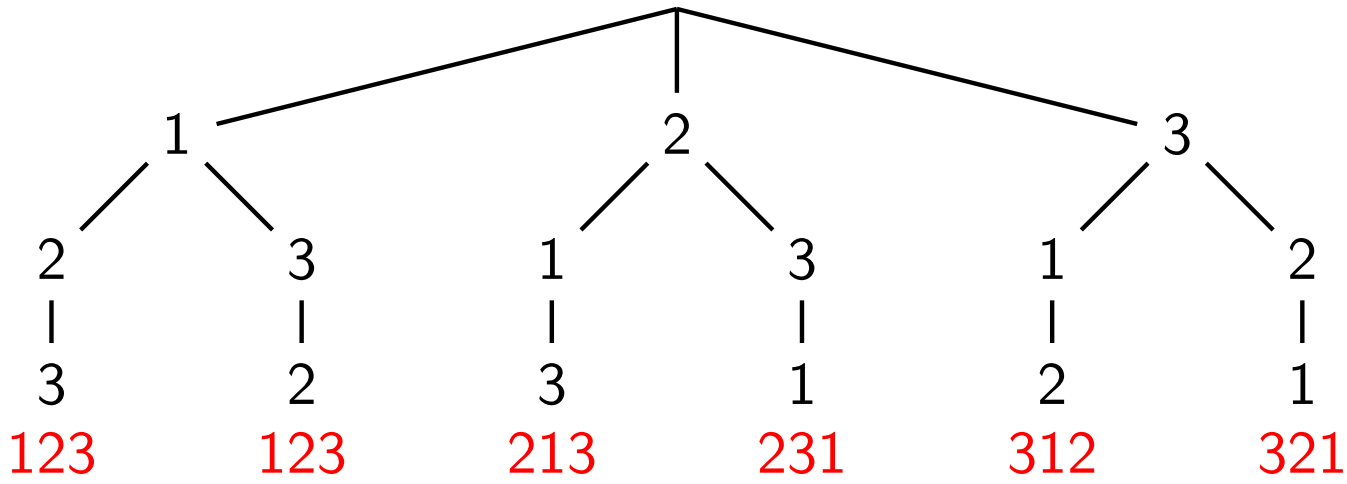
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1 \quad 5 \quad 4)\,(2)\,(3 \quad 6)$$

3. Anwendungen

- Brute-Force-Algorithmen, bei denen alle möglichen Anordnungen ausprobiert werden
- Suchen nach einer optimalen Reihenfolge, beispielsweise bei Planungs- oder Optimierungsproblemen

4. Anzahl Permutationen

Wir bestimmen diese Anzahl mit einem Permutationsbaum
z. B. für $n = 3$ Elemente:



Liest man die Zahlen entlag der Pfade von der Wurzel (oben) bis zu den Blättern (ganz unten), so erhält man alle Permutationen aus drei Elementen.

Anzahl Permutationen von n Elementen: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	...

$n!$ [lies: „n Fakultät“] Problem: $n!$ wächst extrem schnell.

5. Lexikographische Ordnung

Eine Permutation α ist lexikographisch kleiner als eine Permutation β (kurz: $\alpha < \beta$), wenn das Zeichen $\alpha[i]$ mit dem niedrigsten Index i, in dem sich die beiden Permutationen unterscheiden, kleiner ist als das entsprechende Zeichen $\beta[i]$.

Beispiele:

(a) $(3, 4, 5, 1, 2) < (3, 4, 5, 2, 1)$

(b) $(3, 1, 2, 3, 4) > (2, 5, 4, 3, 1)$

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

Input: Wähle eine Startpermutation $L = (1, 3, 5, 4, 2)$

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

Input: Wähle eine Startpermutation $L = (1, 3, 5, 4, 2)$

(1) Suche von rechts den grössten Index i mit $L[i] < L[i+1]$. Ist das nicht möglich, ist L die letzte Permutation.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ gilt $L[i] < L[i+1]$ bzw. $3 < 5$

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

Input: Wähle eine Startpermutation $L = (1, 3, 5, 4, 2)$

(1) Suche von rechts den grössten Index i mit $L[i] < L[i+1]$. Ist das nicht möglich, ist L die letzte Permutation.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ gilt $L[i] < L[i+1]$ bzw. $3 < 5$

(2) Suche von rechts den grössten Index j mit $L[i] < L[j]$.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ und $j = 3$ gilt $L[i] < L[j]$ bzw. $3 < 4$

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

Input: Wähle eine Startpermutation $L = (1, 3, 5, 4, 2)$

(1) Suche von rechts den grössten Index i mit $L[i] < L[i+1]$. Ist das nicht möglich, ist L die letzte Permutation.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ gilt $L[i] < L[i+1]$ bzw. $3 < 5$

(2) Suche von rechts den grössten Index j mit $L[i] < L[j]$.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ und $j = 3$ gilt $L[i] < L[j]$ bzw. $3 < 4$

(3) Tausche die Elemente an den Positionen i und j.

$(1, \underline{3}, 5, \underline{4}, 2) \quad \Rightarrow \quad (1, \underline{4}, 5, \underline{3}, 2)$

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

Input: Wähle eine Startpermutation $L = (1, 3, 5, 4, 2)$

(1) Suche von rechts den grössten Index i mit $L[i] < L[i+1]$. Ist das nicht möglich, ist L die letzte Permutation.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ gilt $L[i] < L[i+1]$ bzw. $3 < 5$

(2) Suche von rechts den grössten Index j mit $L[i] < L[j]$.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ und $j = 3$ gilt $L[i] < L[j]$ bzw. $3 < 4$

(3) Tausche die Elemente an den Positionen i und j.

$(1, \underline{3}, 5, \underline{4}, 2) \quad \Rightarrow \quad (1, \underline{4}, 5, \underline{3}, 2)$

(4) Kehre die Reihenfolge der Elemente $L[i+1], \ldots, L[n-1]$ um.

$(1, 4, 5, 3, 2) \quad \Rightarrow \quad (1, 4, 2, 3, 5)$

6. Der Next Permutation-Algorithmus

Ziel: Bestimme zu einer Permutation die lexikographische nächste.

Input: Wähle eine Startpermutation $L = (1, 3, 5, 4, 2)$

(1) Suche von rechts den grössten Index i mit $L[i] < L[i+1]$. Ist das nicht möglich, ist L die letzte Permutation.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ gilt $L[i] < L[i+1]$ bzw. $3 < 5$

(2) Suche von rechts den grössten Index j mit $L[i] < L[j]$.

$(1, 3, 5, 4, 2)$ für $i = 1$ und $j = 3$ gilt $L[i] < L[j]$ bzw. $3 < 4$

(3) Tausche die Elemente an den Positionen i und j.

$(1, \underline{3}, 5, \underline{4}, 2) \quad \Rightarrow \quad (1, \underline{4}, 5, \underline{3}, 2)$

(4) Kehre die Reihenfolge der Elemente $L[i+1], \ldots, L[n-1]$ um.

$(1, 4, 5, 3, 2) \quad \Rightarrow \quad (1, 4, 2, 3, 5)$

$(1, 4, 2, 3, 5)$ ist die gesuchte lexikographisch nächste Permutation.

Beispiel: Erzeugung aller Permutationen der Länge 3

Beachte dass die Indizes i und j jeweils bei 0 beginnen.

Permutation	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
$(1,2,3)$	$i=1$	$j=2$	$(1,3,2)$	$(1,3,2)$
$(1,3,2)$	$i=0$	$j=2$	$(2,3,1)$	$(2,1,3)$
$(2,1,3)$	$i=1$	$j=2$	$(2,3,1)$	$(2,3,1)$
$(2,3,1)$	$i=0$	$j=1$	$(3,2,1)$	$(3,1,2)$
$(3,1,2)$	$i=1$	$j=2$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
$(3,2,1)$	–			

Das Verfahren geht auf den Indischen Mathematiker Nārāyaṇa Paṇḍita (1340–1400) zurück und wurde seither oft wiederentdeckt.

7. Implementierung (Pseudocode)

Wir teilen die Aufgabe, alle Permutationen der Länge n zu erzeugen, in drei Teile auf:

1. die Funktion `next_permutation(L)`,
2. die Hilfsfunktion `reverse_slice(L, i, j)`,
3. die Verarbeitung aller Permutationen

7.1 Die Funktion `next_permutation(L)`

Die Funktion verändert die Liste L inplace und gibt `True` zurück, wenn eine nächste Permutation gefunden wurde. Existiert keine nächste Permutation, gibt sie `False` zurück.

```
1  FUNCTION next_permutation(L):
2      n <- length(L) // Schritt 1
3      i <- n - 2
4      WHILE i >= 0 AND L[i] >= L[i + 1]:
5          i <- i - 1
6      IF i < 0:
7          RETURN False
8
9      j <- n - 1 // Schritt 2
10     WHILE NOT (L[i] < L[j]):
11         j <- j - 1
12
13     SWAP L[i], L[j] // Schritt 3
14
15     reverse_slice(L, i + 1, n) // Schritt 4
16     RETURN True
```

7.2 Die Funktion `reverse_slice(L, i, j)`

Die Funktion `reverse_slice(L, i, j)` kehrt in der Liste `L` die Reihenfolge der Elemente mit den Indizes $i, i+1, \ldots, j-1$ um.

```
1  FUNCTION reverse_slice(L, i, j)
2      left <- i
3      right <- j-1
4      WHILE left < right:
5          SWAP L[left], L[right]
6      left <- left + 1
7      right <- right - 1
```

7.3 Die Verarbeitung von Permutationen

Falls nötig, wird die Liste mit den Elementen aufsteigend sortiert. Anschliessend wird im Rumpf einer fussgesteuerten Schleife die Liste verarbeitet, dann mit `next_permutation(L)` die nächste Permutation bestimmt. Sobald der Rückgabewert dieser Funktion `false` zurückgibt, wird die Schleife beendet.

```
1  SORT(L)
2
3  WHILE true
4      PROCESS(L)
5      IF next_permutation(L) = false THEN
6          BREAK
```