Laufzeitkomplexität

Übungen

Aufgabe 1

Bestimme für jede Funktion $f(n)$ und jede gegebene Problemgrösse n die Dauer t, wenn der Algorithmus $f(n)$ Sekunden zur Lösung des Problems benötigt.

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1				
$\log_2 n$				
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1				
$\log_2 n$				
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1			
$\log_2 n$				
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1		
$\log_2 n$				
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	
$\log_2 n$				
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$				
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1			
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2		
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$				
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4			
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2		
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n				
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2			
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4		
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$				
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2			
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8		
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2				
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4			
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16		
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3				
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8			
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64		
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	4096
2^n				65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	4096
2^n	4			65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	4096
2^n	4	16		65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	4096
2^n	4	16	256	65536
$n!$			40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	4096
2^n	4	16	256	65536
$n!$	2		40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 1

$f(n)$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
1	1	1	1	1
$\log_2 n$	1	2	3	4
$\sqrt{n}$	1.4	2	2.8	4
n	2	4	8	16
$n \log_2 n$	2	8	24	64
n^2	4	16	64	256
n^3	8	64	512	4096
2^n	4	16	256	65536
$n!$	2	24	40320	$2.1 \cdot 10^{13}$

Aufgabe 2

Zu welcher Komplexitätsklasse gehören die Algorithmen mit der folgenden Laufzeitfunktion $T(n)$ [in ms].

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2$

(b) $T(n) = 2^{n+3}$

(c) $T(n) = 4$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n}$

(e) $T(n) = \log_2(234n)$

(f) $T(n) = (4n + 3)(5n - 4)(7n - 6)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n} = \sqrt{7.6} \cdot \sqrt{n}$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n} = \sqrt{7.6} \cdot \sqrt{n} \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n} = \sqrt{7.6} \cdot \sqrt{n} \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

(e) $T(n) = \log_2(234n)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n} = \sqrt{7.6} \cdot \sqrt{n} \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

(e) $T(n) = \log_2(234n) = \log_2 234 + \log_2 n \in \mathcal{O}(\log_2 n)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n} = \sqrt{7.6} \cdot \sqrt{n} \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

(e) $T(n) = \log_2(234n) = \log_2 234 + \log_2 n \in \mathcal{O}(\log_2 n)$

(f) $T(n) = (4n + 3)(5n - 4)(7n - 6)$

Aufgabe 2

(a) $T(n) = 4n + 5n^2 - 2 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $T(n) = 2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(c) $T(n) = 4 \in \mathcal{O}(1)$

(d) $T(n) = \sqrt{7.6n} = \sqrt{7.6} \cdot \sqrt{n} \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

(e) $T(n) = \log_2(234n) = \log_2 234 + \log_2 n \in \mathcal{O}(\log_2 n)$

(f) $T(n) = (4n + 3)(5n - 4)(7n - 6) \in \mathcal{O}(n^3)$

Aufgabe 3

In welcher Komplexitätsklasse befindet sich $T_1(n) + T_2(n)$, wenn $T_1(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ und $T_2(n) \in \mathcal{O}(n^3)$ gilt?

Aufgabe 3

$$\big(T_1(n) + T_2(n)\big) \in \mathcal{O}\big(\max(n^2, n^3)\big) = \mathcal{O}(n^3)$$

Aufgabe 4

In welcher Komplexitätsklasse befindet sich $T_1(n) \cdot T_2(n)$, wenn $T_1(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ und $T_2(n) \in \mathcal{O}(n^3)$ gilt?

Aufgabe 4

$$T_1(n) \cdot T_2(n) \in \mathcal{O}\left(n^2 \cdot n^3\right) = \mathcal{O}(n^5)$$

Aufgabe 5

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ und benötigt etwa 20 μs für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 100$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 200$.

Aufgabe 5

$T(n) = C \cdot 100^2 = 20\,\mu\text{s}$ $(*)$ [C ist ein Proportionalitätsfaktor]

Aufgabe 5

$T(n) = C \cdot 100^2 = 20\,\mu\text{s}$ $(*)$ [C ist ein Proportionalitätsfaktor]

$$T(2n) = C \cdot 200^2 = C \cdot (2 \cdot 100)^2 = 2^2 \cdot C \cdot 100^2 \overset{(*)}{=} 4 \cdot 20\,\mu\text{s} = 80\,\mu\text{s}$$

Aufgabe 5

$T(n) = C \cdot 100^2 = 20\,\mu\text{s}\ (*)$ [C ist ein Proportionalitätsfaktor]

$T(2n) = C \cdot 200^2 = C \cdot (2 \cdot 100)^2 = 2^2 \cdot C \cdot 100^2 \overset{(*)}{=} 4 \cdot 20\,\mu\text{s} = 80\,\mu\text{s}$

Allgemein: In $O(n^2)$ bewirkt das Verdoppeln der Problemgrösse eine Vervierfachung der Laufzeit.

Aufgabe 5

$T(n) = C \cdot 100^2 = 20\,\mu s\ (*)$ [C ist ein Proportionalitätsfaktor]

$T(2n) = C \cdot 200^2 = C \cdot (2 \cdot 100)^2 = 2^2 \cdot C \cdot 100^2 \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 20\,\mu s = 80\,\mu s$

Allgemein: In $O(n^2)$ bewirkt das Verdoppeln der Problemgrösse eine Vervierfachung der Laufzeit.

Man hätte auch die erste Gleichung nach C auflösen und diesen Wert in die zweite Gleichung einsetzen können. Meist lässt sich die Rechung jedoch in der oben beschriebenen Weise „kurzschliessen“.

Aufgabe 6

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ und benötigt etwa 10 ms für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 200$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 20000$.

Aufgabe 6

$$T(200) = C \cdot \sqrt{200} = 10\,\mathrm{ms} \ (*)$$

Aufgabe 6

$$T(200) = C \cdot \sqrt{200} = 10\,\mathrm{ms} \;\; (*)$$

$$T(20\,000) = C \cdot \sqrt{100 \cdot 200}$$

Aufgabe 6

$$T(200) = C \cdot \sqrt{200} = 10\,\text{ms}\ (*)$$

$$\begin{aligned} T(20\,000) &= C \cdot \sqrt{100 \cdot 200} \\ &= C \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{200} = 10 \cdot C \cdot \sqrt{200} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$T(200) = C \cdot \sqrt{200} = 10\,\text{ms} \; (*)$$

$$\begin{aligned} T(20\,000) &= C \cdot \sqrt{100 \cdot 200} \\ &= C \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{200} = 10 \cdot C \cdot \sqrt{200} \\ &\overset{(*)}{=} 10 \cdot 10\,\text{ms} = 100\,\text{ms} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$T(200) = C \cdot \sqrt{200} = 10\,\text{ms} \ (*)$$

$$\begin{aligned} T(20\,000) &= C \cdot \sqrt{100 \cdot 200} \\ &= C \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{200} = 10 \cdot C \cdot \sqrt{200} \\ &\overset{(*)}{=} 10 \cdot 10\,\text{ms} = 100\,\text{ms} \end{aligned}$$

Allgemein: In $O(\sqrt{n})$ bewirkt eine Vergrösserung der Problemgrösse mit dem Faktor 100 eine Vergrösserung der Laufzeit mit dem Faktor $\sqrt{100} = 10$.

Aufgabe 7

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(\log_2 n)$ und benötigt etwa 5 s für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 1000$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 8\,000$.

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}\ (*)$$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}\ (*)$$

$$T(8000) = C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\big[\log_2(8) + \log_2(1000)\big]$$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}\ (*)$$

$$\begin{aligned} T(8000) &= C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\left[\log_2(8) + \log_2(1000)\right] \\ &= C \log_2(8) + C \log_2(1000) \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s} \ (*)$$

$$\begin{aligned} T(8000) &= C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\big[\log_2(8) + \log_2(1000)\big] \\ &= C \log_2(8) + C \log_2(1000) \\ &\overset{(*)}{=} C \cdot 3 + 5\,\mathrm{s} = \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s} \;(*)$$

$$\begin{aligned} T(8000) &= C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\big[\log_2(8) + \log_2(1000)\big] \\ &= C \log_2(8) + C \log_2(1000) \\ &\overset{(*)}{=} C \cdot 3 + 5\,\mathrm{s} = \ldots \end{aligned}$$

Hier benötigen wir den konkreten Wert der Konstanten C.

$C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}$ verwende $10^3 \approx 2^{10}$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}\ (*)$$

$$\begin{aligned} T(8000) &= C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\big[\log_2(8) + \log_2(1000)\big] \\ &= C\log_2(8) + C\log_2(1000) \\ &\overset{(*)}{=} C \cdot 3 + 5\,\mathrm{s} = \dots \end{aligned}$$

Hier benötigen wir den konkreten Wert der Konstanten C.

$C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}$ verwende $10^3 \approx 2^{10}$

$C \cdot \log_2(2^{10}) \approx 5\,\mathrm{s}$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s}\ (*)$$

$$\begin{aligned} T(8000) &= C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\left[\log_2(8) + \log_2(1000)\right] \\ &= C\log_2(8) + C\log_2(1000) \\ &\overset{(*)}{=} C \cdot 3 + 5\,\mathrm{s} = \dots \end{aligned}$$

Hier benötigen wir den konkreten Wert der Konstanten C.

$$\begin{aligned} C \cdot \log_2(1000) &= 5\,\mathrm{s} \quad \text{verwende } 10^3 \approx 2^{10} \\ C \cdot \log_2(2^{10}) &\approx 5\,\mathrm{s} \\ C \cdot 10 &\approx 5\,\mathrm{s} \\ C &\approx 0.5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$T(1000) = C \cdot \log_2(1000) = 5\,\mathrm{s} \ (*)$$

$$\begin{aligned} T(8000) &= C \cdot \log_2(8 \cdot 1000) = C\left[\log_2(8) + \log_2(1000)\right] \\ &= C \log_2(8) + C \log_2(1000) \\ &\overset{(*)}{=} C \cdot 3 + 5\,\mathrm{s} = \ldots \end{aligned}$$

Hier benötigen wir den konkreten Wert der Konstanten C.

$$\begin{aligned} C \cdot \log_2(1000) &= 5\,\mathrm{s} \quad \text{verwende } 10^3 \approx 2^{10} \\ C \cdot \log_2(2^{10}) &\approx 5\,\mathrm{s} \\ C \cdot 10 &\approx 5\,\mathrm{s} \\ C &\approx 0.5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Damit: $\ldots = 0.5\,\mathrm{s} \cdot 3 + 5\,\mathrm{s} = 6.5\,\mathrm{s}$

Allgemein: Multipliziert man die Problemgrösse eines logarithmisch wachsenden Algorithmus mit dem Faktor k, so erhöht sich die Laufzeit um den Summanden $C \log(k)$.

Aufgabe 8

Eine Implementation eines Algorithmus' hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(n!)$ und benötigt etwa 50 ms für das Lösen eines Problems der Grösse $n = 19$. Bestimme die ungefähre Laufzeit für ein Problem der Grösse $n = 20$.

Aufgabe 8

$$T(19) = C \cdot 19! = 50\,\text{ms} \ (*)$$

Aufgabe 8

$$T(19) = C \cdot 19! = 50\,\text{ms} \; (*)$$

$$T(20) = C \cdot 20!$$

Aufgabe 8

$$T(19) = C \cdot 19! = 50\,\text{ms} \ (*)$$

$$T(20) = C \cdot 20! = C \cdot 20 \cdot 19!$$

Aufgabe 8

$$T(19) = C \cdot 19! = 50\,\mathrm{ms}\ (*)$$

$$T(20) = C \cdot 20! = C \cdot 20 \cdot 19! = 20 \cdot C \cdot 19!$$

Aufgabe 8

$$T(19) = C \cdot 19! = 50\,\text{ms}\ (*)$$

$$\begin{aligned} T(20) &= C \cdot 20! = C \cdot 20 \cdot 19! = 20 \cdot C \cdot 19! \\ &\overset{(*)}{=} 20 \cdot 50\,\text{ms} = 1000\ \text{ms} = 1\,\text{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 8

$$T(19) = C \cdot 19! = 50\,\text{ms}\ (*)$$

$$\begin{aligned} T(20) &= C \cdot 20! = C \cdot 20 \cdot 19! = 20 \cdot C \cdot 19! \\ &\overset{(*)}{=} 20 \cdot 50\,\text{ms} = 1000\ \text{ms} = 1\,\text{s} \end{aligned}$$

Allgemein: Vergrössert man ein exponentiell wachsendes Problem der Grösse n um eine weitere Eingabe, so erhöht sich die Laufzeit um den Faktor $n + 1$.

Aufgabe 9

Bestimme die Komplexitätsklasse des Python Code-Fragments:

```python
s = 0
for i in range(0, len(A)):
    s += A[i]
```

Aufgabe 9

```
1 s = 0
2 for i in range(0, len(A)):
3     s += A[i]
```

Zeile	Kosten	Anzahl

Aufgabe 9

```
s = 0
for i in range(0, len(A)):
    s += A[i]
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1

Aufgabe 9

```
1 s = 0
2 for i in range(0, len(A)):
3     s += A[i]
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	n

Aufgabe 9

```python
s = 0
for i in range(0, len(A)):
    s += A[i]
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	n
3	c_3	n

Aufgabe 9

```
1 s = 0
2 for i in range(0, len(A)):
3     s += A[i]
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	n
3	c_3	n

$$T(n) = c_1 \cdot 1 + (c_2 + c_3) \cdot n$$

Aufgabe 9

```
s = 0
for i in range(0, len(A)):
    s += A[i]
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	n
3	c_3	n

$T(n) = c_1 \cdot 1 + (c_2 + c_3) \cdot n \in \mathcal{O}(n)$ wobei $n = \texttt{len(A)}$

Aufgabe 10

Bestimme die Komplexitätsklasse des Python Code-Fragments:

```
s = 1
for i in range(1, n):
    for j in range(1, n):
        s = s + i*j
```

Aufgabe 10

```python
s = 1
for i in range(1, n):
    for j in range(1, n):
        s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl

Aufgabe 10

```
1 s = 1
2 for i in range(1, n):
3     for j in range(1, n):
4         s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1

Aufgabe 10

```
1 s = 1
2 for i in range(1, n):
3     for j in range(1, n):
4         s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	$n-1$

Aufgabe 10

```
s = 1
for i in range(1, n):
    for j in range(1, n):
        s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	$n-1$
3	c_3	$(n-1)(n-1)$

Aufgabe 10

```
1 s = 1
2 for i in range(1, n):
3     for j in range(1, n):
4         s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	$n-1$
3	c_3	$(n-1)(n-1)$
4	c_4	$(n-1)(n-1)$

Aufgabe 10

```python
s = 1
for i in range(1, n):
    for j in range(1, n):
        s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	$n-1$
3	c_3	$(n-1)(n-1)$
4	c_4	$(n-1)(n-1)$

$$T(n) = c_1 \cdot 1 + c_2(n-1) + (c_3 + c_4)(n-1)(n-1)$$

Aufgabe 10

```python
1 s = 1
2 for i in range(1, n):
3     for j in range(1, n):
4         s = s + i*j
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	$n-1$
3	c_3	$(n-1)(n-1)$
4	c_4	$(n-1)(n-1)$

$$T(n) = c_1 \cdot 1 + c_2(n-1) + (c_3 + c_4)(n-1)(n-1) \in \mathcal{O}(n^2)$$

Aufgabe 11

Bestimme die Komplexitätsklasse des Python Code-Fragments.

```
a = 4
b = a**2
c = -b
d = (a+b)*c
```

Aufgabe 11

```
a = 4
b = a**2
c = -b
d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl

Aufgabe 11

```
1 a = 4
2 b = a**2
3 c = -b
4 d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1

Aufgabe 11

```
1 a = 4
2 b = a**2
3 c = -b
4 d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1

Aufgabe 11

```
1 a = 4
2 b = a**2
3 c = -b
4 d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	1

Aufgabe 11

```
1 a = 4
2 b = a**2
3 c = -b
4 d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	1
4	c_4	1

Aufgabe 11

```
1 a = 4
2 b = a**2
3 c = -b
4 d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	1
4	c_4	1

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \cdot 1$$

Aufgabe 11

```
1 a = 4
2 b = a**2
3 c = -b
4 d = (a+b)*c
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	1
4	c_4	1

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \cdot 1 \in \mathcal{O}(1)$$

Aufgabe 12

Bestimme die Komplexitätsklasse des folgenden Code-Fragments:

```
i = n
s = 0
while i > 0:
    s = s + 1
    i = i // 2
```

Aufgabe 12

```python
i = n
s = 0
while i > 0:
    s = s + 1
    i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl

Aufgabe 12

```
1 i = n
2 s = 0
3 while i > 0:
4     s = s + 1
5     i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1

Aufgabe 12

```
1 i = n
2 s = 0
3 while i > 0:
4     s = s + 1
5     i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1

Aufgabe 12

```
i = n
s = 0
while i > 0:
    s = s + 1
    i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	$\log_2 n$

Aufgabe 12

```
1 i = n
2 s = 0
3 while i > 0:
4     s = s + 1
5     i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	$\log_2 n$
4	c_4	$\log_2 n$

Aufgabe 12

```
1 i = n
2 s = 0
3 while i > 0:
4     s = s + 1
5     i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	$\log_2 n$
4	c_4	$\log_2 n$
5	c_5	$\log_2 n$

Aufgabe 12

```
i = n
s = 0
while i > 0:
    s = s + 1
    i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	$\log_2 n$
4	c_4	$\log_2 n$
5	c_5	$\log_2 n$

Aufgabe 12

```
i = n
s = 0
while i > 0:
    s = s + 1
    i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	$\log_2 n$
4	c_4	$\log_2 n$
5	c_5	$\log_2 n$

$$T(n) = (c_1 + c_2) \cdot 1 + (c_3 + c_4 + c_5) \cdot \log_2 n$$

Aufgabe 12

```
1 i = n
2 s = 0
3 while i > 0:
4     s = s + 1
5     i = i // 2
```

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	1
2	c_2	1
3	c_3	$\log_2 n$
4	c_4	$\log_2 n$
5	c_5	$\log_2 n$

$$T(n) = (c_1 + c_2) \cdot 1 + (c_3 + c_4 + c_5) \cdot \log_2 n \in \mathcal{O}(\log_2 n)$$

Aufgabe 13

Zu welcher Komplexitätsklasse gehören die folgenden Algorithmen?

(a) Ein Element in einer unsortierten Liste suchen.
(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
(c) Eine Liste mit Bubblesort sortieren.
(d) Die Brute-Force-Lösung des Travelling Salesman-Problems.
(e) Eine Liste mit zufällig angeordneten Elementen mit Quicksort sortieren.

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

(c) Eine Liste von Zahlen mit Bubblesort sortieren.

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

(c) Eine Liste von Zahlen mit Bubblesort sortieren.
$\mathcal{O}(n^2)$

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

(c) Eine Liste von Zahlen mit Bubblesort sortieren.
$\mathcal{O}(n^2)$

(d) Die Brute-Force-Lösung des Travelling Salesman-Problems.

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

(c) Eine Liste von Zahlen mit Bubblesort sortieren.
$\mathcal{O}(n^2)$

(d) Die Brute-Force-Lösung des Travelling Salesman-Problems.
$\mathcal{O}(n!)$

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

(c) Eine Liste von Zahlen mit Bubblesort sortieren.
$\mathcal{O}(n^2)$

(d) Die Brute-Force-Lösung des Travelling Salesman-Problems.
$\mathcal{O}(n!)$

(e) Eine Liste von Zufallszahlen mit Quicksort sortieren.

Aufgabe 13

(a) Nach einem Element in einer sortierten Liste suchen.
$\mathcal{O}(\log_2 n)$

(b) Zwei Matrizen multiplizieren.
$\mathcal{O}(n^3)$

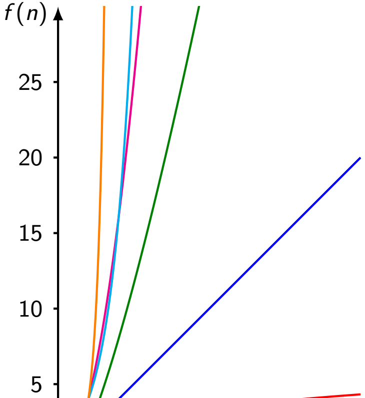
(c) Eine Liste von Zahlen mit Bubblesort sortieren.
$\mathcal{O}(n^2)$

(d) Die Brute-Force-Lösung des Travelling Salesman-Problems.
$\mathcal{O}(n!)$

(e) Eine Liste von Zufallszahlen mit Quicksort sortieren.
$\mathcal{O}(n \log_2 n)$

Aufgabe 14

Ordne die Laufzeiten $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = \log_2(x)$, $f_5(x) = x \log_2(x)$, $f_6(x) = 2^x$, $f_7(x) = x^x$ den passende Graphen zu.



Aufgabe 14