Das Problem der Museumswächter

(Art Gallery Problem)

Die Fragestellung

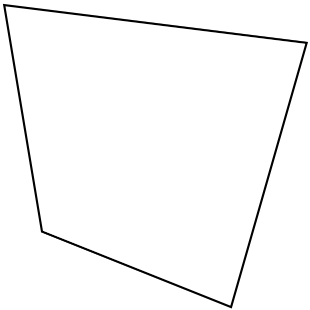
Gegeben: Ein Museum, dessen Grundriss n Ecken hat.

Die Fragestellung

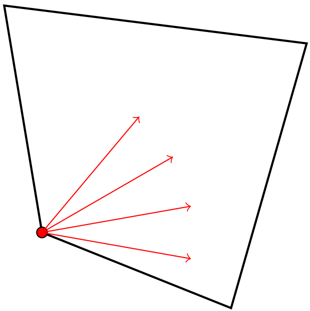
Gegeben: Ein Museum, dessen Grundriss n Ecken hat.

Gesucht: Eine obere Schranke für die minimale Anzahl von Museumswächtern und ihre Positionen („Wächterpunkte"), so dass jeder Punkt des Museums durch mindestens einen Sehstrahl eines Wächters getroffen wird.

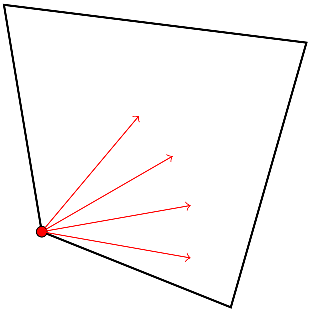
Beispiel 1



Beispiel 1

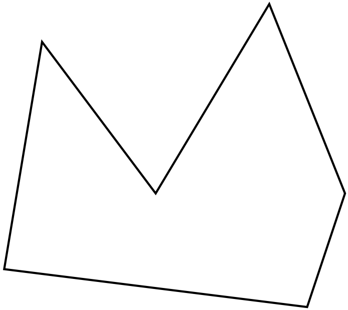


Beispiel 1

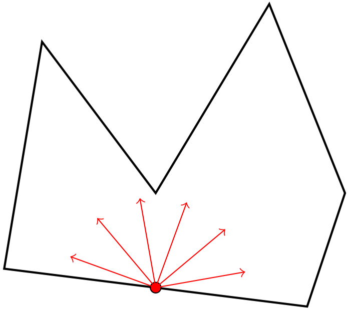


1 Wächterpunkt

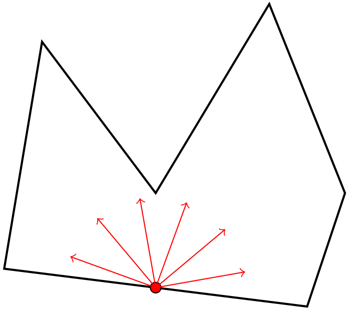
Beispiel 2



Beispiel 2

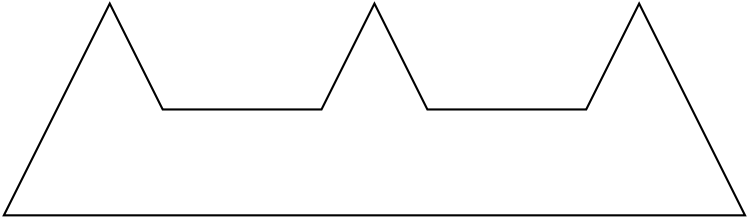


Beispiel 2

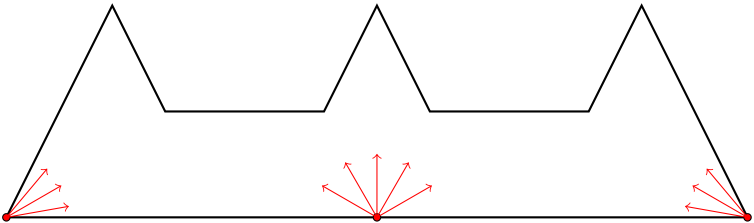


1 Wächterpunkt

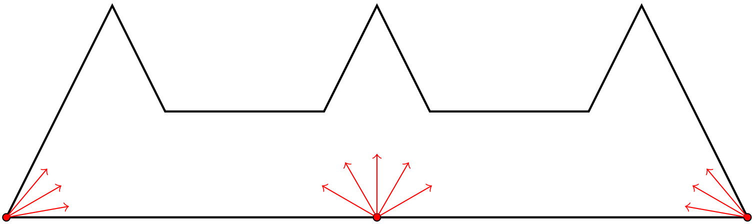
Beispiel 3



Beispiel 3



Beispiel 3



3 Wächterpunkte

Anwendungen

Anwendungen

- Kameraüberwachung

Anwendungen

- Kameraüberwachung
- Beleuchtung von Räumen

Anwendungen

- Kameraüberwachung
- Beleuchtung von Räumen
- Steuerung von Robotern

Anwendungen

- Kameraüberwachung
- Beleuchtung von Räumen
- Steuerung von Robotern
- Messstationen zur Warnung vor Naturkatastrophen

Der Satz von Chvátal

Der folgende Satz liefert eine obere Schranke für die minimale Anzahl der benötigten Wächterpunkte:

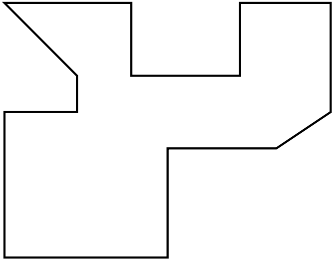
Der Satz von Chvátal

Der folgende Satz liefert eine obere Schranke für die minimale Anzahl der benötigten Wächterpunkte:

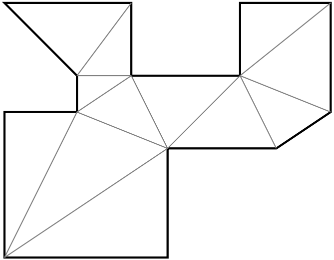
Zur Überwachung eines ebenen überschneidungsfreien geschlossen n-eckigen Polygons werden höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächterpunkte benötigt.

(Vašek Chvátal, 1975)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)

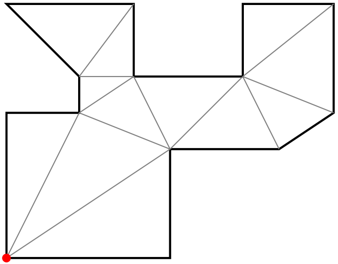


Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



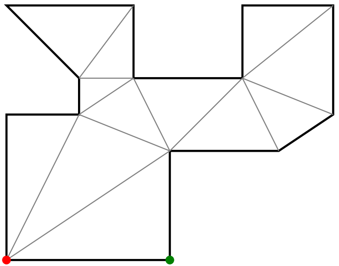
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



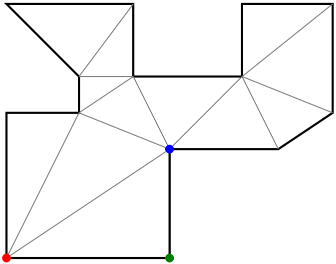
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



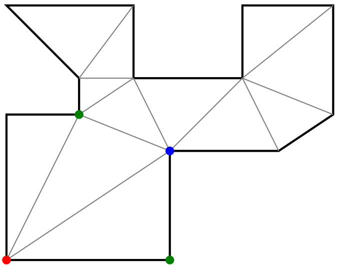
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



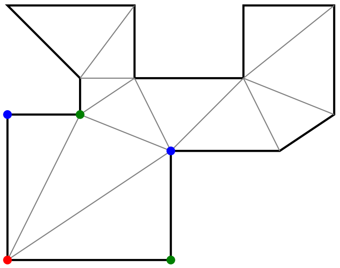
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



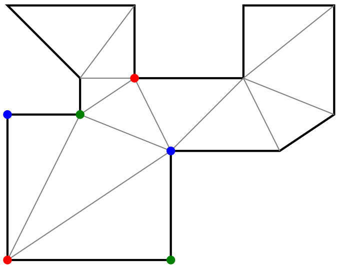
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



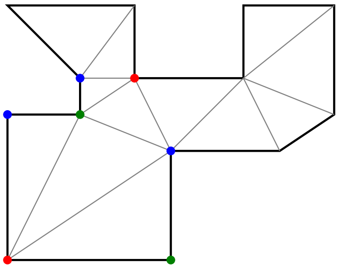
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



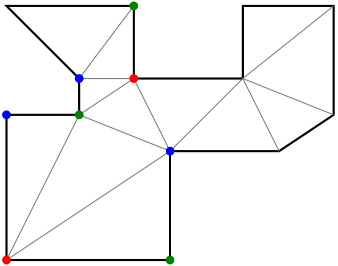
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



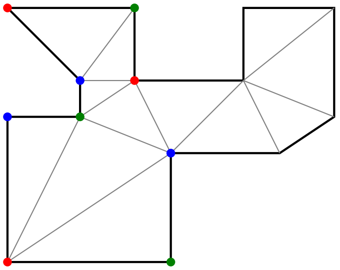
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



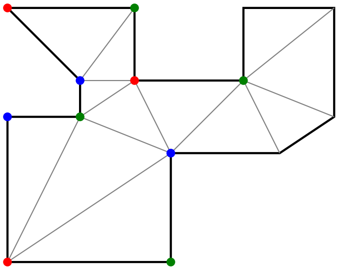
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



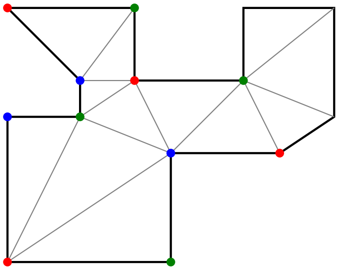
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



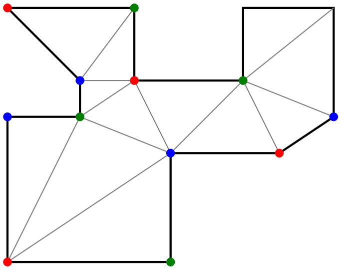
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



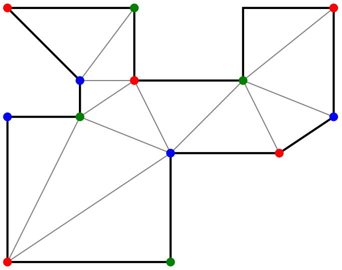
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



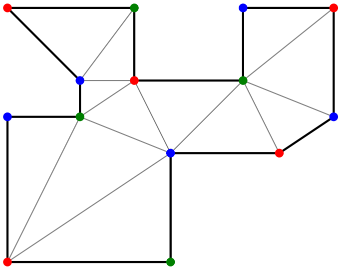
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



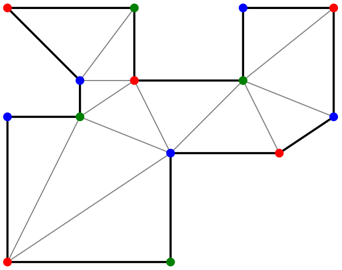
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



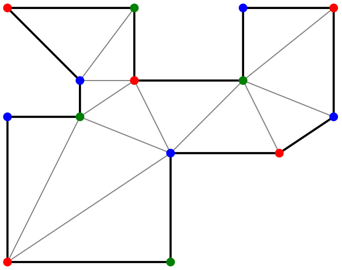
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)
3. Jede Farbklasse ist eine Eckenmenge, von der aus jedes Dreieck und damit jeder Punkt der Fläche überwacht werden kann.

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)
3. Jede Farbklasse ist eine Eckenmenge, von der aus jedes Dreieck und damit jeder Punkt der Fläche überwacht werden kann.
4. $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ist die Anzahl Punkte der kleinsten Farbklasse.

Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

- In Beispiel 2 genügt *ein* Wächterpunkt.

Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

- In Beispiel 2 genügt *ein* Wächterpunkt.
- In Beispiel 3 sind $\lfloor 9/3 \rfloor = 3$ Wächterpunkte notwendig.