

Wegparametrisierungen

Übungen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(0,0)$ und $B(2,4)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

- (a) Bestimme eine lineare Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 2]$.
- (b) Bestimme eine lineare Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 1]$.
- (c) Bestimme eine parabelförmige Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 2]$.
- (d) Bestimme eine parabelförmige Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 1]$.

Aufgabe 1

Weg von $A(0,0)$ nach $B(2,4)$

- (a) Lineare Parametrisierung von A nach B für $t \in [0,2]$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$

- (b) Lineare Parametrisierung von A nach B mit $t \in [0,1]$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \end{pmatrix}$$

- (c) Parabelförmige Parametrisierung von A nach B mit $t \in [0,2]$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

- (d) Parabelförmige Parametrisierung von A nach B mit $t \in [0,1]$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ (2t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A = (-1, 2, 1)$ und $B = (3, 0, 5)$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

- (a) Bestimme eine Parametrisierung der Strecke von A nach B für $t \in [0, 1]$.
- (b) Bestimme eine Parametrisierung derselben Strecke für $t \in [0, 2]$.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ für beide Parametrisierungen. Vergleiche die beiden Geschwindigkeitsvektoren.

Aufgabe 2

$$(a) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 + 4t \\ 2 - 2t \\ 1 + 4t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$(b) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2t \\ 2 - t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2]$$

$$(c) \quad \text{Für (a) gilt } \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Für (b) gilt } \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die zweite Parametrisierung durchläuft die Strecke mit halber Geschwindigkeit.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Parabel, die durch $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

- (a) Bestimme Anfangs- und Endpunkt des Weges für $t \in [0, 2]$.
- (b) Gib eine andere Parametrisierung derselben Parabel an, bei der der Parameter das Intervall $[0, 1]$ durchläuft.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ für die Parametrisierung aus (a).

Aufgabe 3

(a) $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) Mit der Substitution $s = 2t$ erhält man $\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 2s \\ 4s^2 \\ 2s \end{pmatrix},$

$$s \in [0, 1].$$

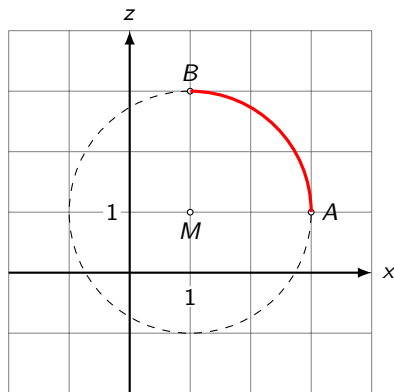
(c) $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis mit Radius $R = 2$ und Mittelpunkt $M = (1, 0, 1)$ im Raum $\mathbb{R}^3$. Der Kreis liegt in der Ebene $y = 0$.

- (a) Parametrisiere den Kreisbogen vom Punkt $A = (3, 0, 1)$ nach $B = (1, 0, 3)$ gegen den Uhrzeigersinn für $t \in [0, \pi/2]$.
- (b) Bestimme eine Parametrisierung desselben Kreisbogens für $t \in [0, 1]$.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor für die Parametrisierung aus (a).

Aufgabe 4



$$(a) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos t \\ 0 \\ 1 + 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$(b) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos(\pi t/2) \\ 0 \\ 1 + 2 \sin(\pi t/2) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

Aufgabe 5

Eine Ellipse liegt in der Ebene $z = 2$ und wird durch die Gleichung

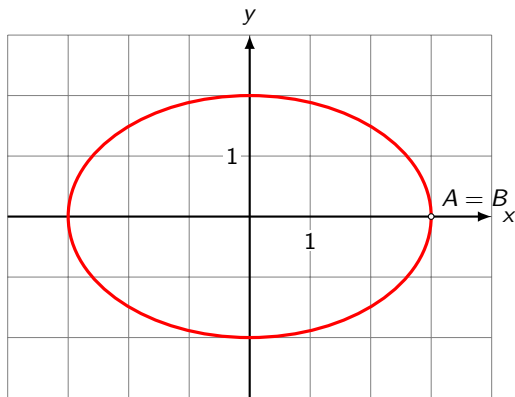
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

beschrieben.

- (a) Bestimme eine Parametrisierung, welche die Ellipse einmal vollständig gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, für $t \in [0, 2\pi]$.
- (b) Bestimme Anfangs- und Endpunkt des Weges.
- (c) Begründe, dass es sich um einen geschlossenen Weg handelt.

Aufgabe 5

Ellipse in der Ebene $z = 2$:



$$(a) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(b) \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{r}(2\pi)$$

Aufgabe 6

Ein Teilchen bewegt sich auf einer Schraubenlinie im dreidimensionalen Raum.

Seine Bahn liegt auf dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4$.

- (a) Bestimme eine Parametrisierung der Schraubenlinie, bei der das Teilchen für $t \in [0, 2\pi]$ genau eine Umdrehung um die z -Achse ausführt und sich gleichzeitig in positiver z -Richtung bewegt.

Die Höhe soll dabei von $z = 0$ auf $z = 2\pi$ ansteigen.

- (b) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor.
- (c) Bestimme den Betrag der Geschwindigkeit.

Aufgabe 6

$$(a) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(b) \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \|\dot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \\ &= \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A = (1, -2, 3)$ und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimme die Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ des Teilchens.
- (b) Bestimme den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 2$.
- (c) Bestimme den Betrag der Geschwindigkeit und beschreibe die Bahn des Teilchens.

Aufgabe 7

$$(a) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ -2 + 4t \\ 3 - 2t \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

Die Bahn ist eine Gerade. Das Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrag $\sqrt{29}$.

Aufgabe 8

Ein Rad mit Radius $R = 1$ rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene. Ein Punkt auf dem Rand des Rades beschreibt eine Zykloide.

Die Bahnkurve lässt sich durch

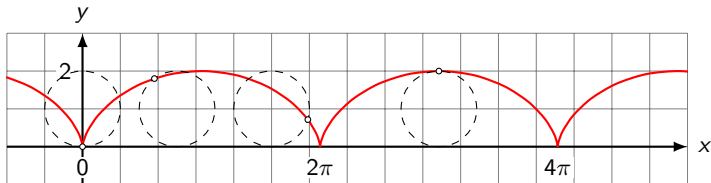
$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t$$

beschreiben.

- (a) Gib eine Parametrisierung des Weges für $t \in [0, 2\pi]$ an.
- (b) Bestimme Anfangs- und Endpunkt des Weges.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$.
- (d) An welchen Stellen des Parameterintervalls ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{0}$?

Aufgabe 8

(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$



(b) $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}(2\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

- (d) Der Geschwindigkeitsvektor verschwindet genau dann, wenn beide Komponenten null sind. Dies ist für $t = 0$ und $t = 2\pi$ der Fall.