

Wenn nicht anders verlangt, sind Parametrisierungen in der Form $\vec{r}(t) = \dots$ anzugeben.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(0, 0)$ und $B(2, 4)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

- (a) Bestimme eine lineare Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 2]$.
- (b) Bestimme eine lineare Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 1]$.
- (c) Bestimme eine parabelförmige Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 2]$.
- (d) Bestimme eine parabelförmige Parametrisierung von A nach B für $t \in [0, 1]$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A = (-1, 2, 1)$ und $B = (3, 0, 5)$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

- (a) Bestimme eine Parametrisierung der Strecke von A nach B für $t \in [0, 1]$.
- (b) Bestimme eine Parametrisierung derselben Strecke für $t \in [0, 2]$.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ für beide Parametrisierungen. Vergleiche die beiden Geschwindigkeitsvektoren.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Parabel, die durch $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

- (a) Bestimme Anfangs- und Endpunkt des Weges für $t \in [0, 2]$.
- (b) Gib eine andere Parametrisierung derselben Parabel an, bei der der Parameter das Intervall $[0, 1]$ durchläuft.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ für die Parametrisierung aus (a).

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis mit Radius $R = 2$ und Mittelpunkt $M = (1, 0, 1)$ im Raum $\mathbb{R}^3$. Der Kreis liegt in der Ebene $y = 0$.

- (a) Parametrisiere den Kreisbogen vom Punkt $A = (3, 0, 1)$ nach $B = (1, 0, 3)$ gegen den Uhrzeigersinn für $t \in [0, \pi/2]$.
- (b) Bestimme eine Parametrisierung desselben Kreisbogens für $t \in [0, 1]$.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor für die Parametrisierung aus (a).

Aufgabe 5

Eine Ellipse liegt in der Ebene $z = 2$ und wird durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

beschrieben.

- (a) Bestimme eine Parametrisierung, welche die Ellipse einmal vollständig gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, für $t \in [0, 2\pi]$.
- (b) Bestimme Anfangs- und Endpunkt des Weges.
- (c) Begründe, dass es sich um einen geschlossenen Weg handelt.

Aufgabe 6

Ein Teilchen bewegt sich auf einer Schraubenlinie im dreidimensionalen Raum.

Seine Bahn liegt auf dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4$.

- (a) Bestimme eine Parametrisierung der Schraubenlinie, bei der das Teilchen für $t \in [0, 2\pi]$ genau eine Umdrehung um die z -Achse ausführt und sich gleichzeitig in positiver z -Richtung bewegt.

Die Höhe soll dabei von $z = 0$ auf $z = 2\pi$ ansteigen.

- (b) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor.
- (c) Bestimme den Betrag der Geschwindigkeit.

Aufgabe 7

Ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A = (1, -2, 3)$ und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimme die Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ des Teilchens.
- (b) Bestimme den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 2$.
- (c) Bestimme den Betrag der Geschwindigkeit und beschreibe die Bahn des Teilchens.

Aufgabe 8

Ein Rad mit Radius $R = 1$ rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene. Ein Punkt auf dem Rand des Rades beschreibt eine Zykloide.

Die Bahnkurve lässt sich durch

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t$$

beschreiben.

- (a) Gib eine Parametrisierung des Weges für $t \in [0, 2\pi]$ an.
- (b) Bestimme Anfangs- und Endpunkt des Weges.
- (c) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$.
- (d) An welchen Stellen des Parameterintervalls ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{0}$?