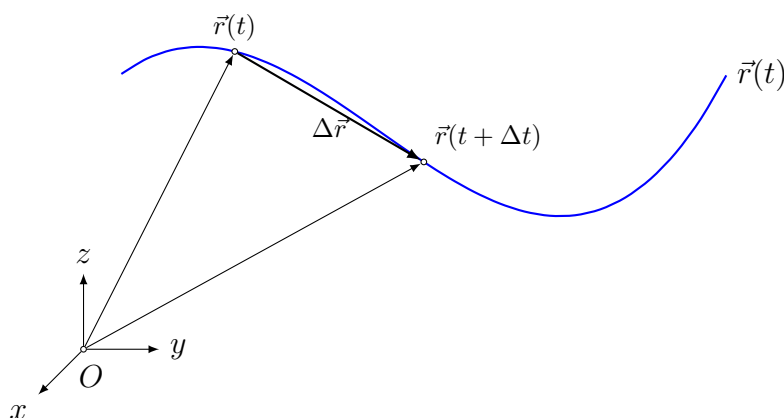


1 Die Bewegungsgleichung

Im Gegensatz zur Vektoralgebra („Vektorgeometrie“) orientiert sich die Vektoranalysis enger an die physikalischen Begriffswelt.

Bahnkurven

Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ zeigt von einem festen Ursprung O zur räumliche Position eines Teilchens, die eine Funktion der Zeit t ist.



t : Parameter

$\vec{r}(t)$: Parameterdarstellung der Bahnkurve

Momentangeschwindigkeit

t und $t + \Delta t$ nahe beieinander.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Momentangeschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$\vec{v}(t)$ ist immer tangential zur Bahnkurve.

Beispiel 1.1

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ 3b - 2ct^2 \\ k \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad a, b, c, k, \omega \text{ const.} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) \\ -4ct \\ k\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Beschleunigung

t und $t + \Delta t$ nahe beieinander:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

$\vec{a}(t)$ kann in „beliebiger“ Richtung zu $\vec{v}(t)$ stehen

Beispiel 1.2

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) \\ -4ct \\ k\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega^2 \cos(\omega t) \\ -4c \\ -k\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichung

$\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{a}(t)$ ist „einfach“

aber: $\vec{r}(t)$ ist nur selten gegeben.

2. Newtonsches Gesetz:

$$F \propto \dot{\vec{p}} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

„Die Änderung des Impulses eines Körpers pro Zeit ist proportional zu der auf ihn wirkenden Kraft und erfolgt in deren Richtung.“

Ist die Masse zeitlich konstant, erhält man die Bewegungsgleichung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(t) = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

„Die Beschleunigung eines Körpers ist proportional zur auf ihn wirkenden Kraft und erfolgt in deren Richtung.“

Somit: $\vec{F}(t) \rightarrow \vec{a}(t) \rightarrow \vec{v}(t) \rightarrow \vec{r}(t)$

Beispiel 1.3

freier Fall: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$

Bewegungsgleichung: $m \cdot \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -mg\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \int 0 \, dt \\ \int 0 \, dt \\ \int -g \, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -gt + c_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int c_1 \, dt \\ \int c_2 \, dt \\ \int (-gt + c_3) \, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 t + c_4 \\ c_2 t + c_5 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_6 \end{pmatrix}$$

Die Integrationskonstanten sind für die Erfüllung der *Randbedingungen*

$$v(t_0) = \begin{pmatrix} v_x(t_0) \\ v_y(t_0) \\ v_z(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r(t_0) = \begin{pmatrix} r_x(t_0) \\ r_y(t_0) \\ r_z(t_0) \end{pmatrix}$$

nötig.

Produktregeln

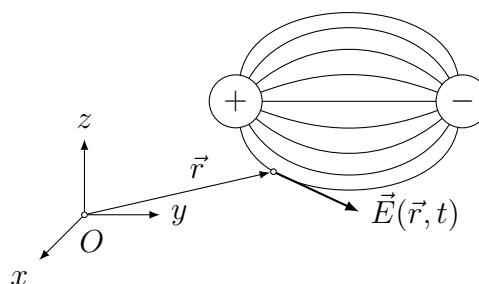
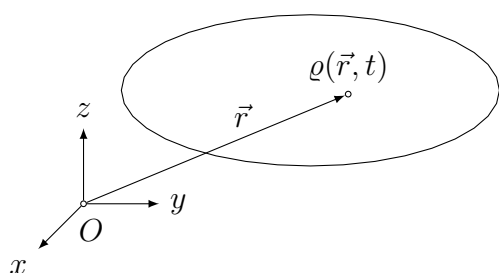
- $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u}(t)) = \frac{df(t)}{dt}\vec{u}(t) + f(t)\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{w}(t)) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \cdot \vec{w}(t) + \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{w}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{w}(t)) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \times \vec{w}(t) + \vec{u}(t) \times \frac{d\vec{w}(t)}{dt}$

2 Felder

Ein *Feld* ist ein Raum, in dem jedem Punkt eine physikalische Grösse zugeordnet wird.

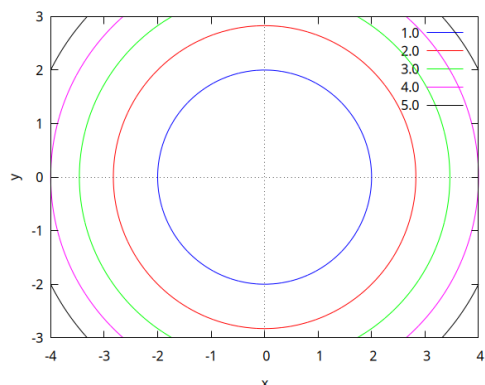
Ist die physikalische Grösse ein Skalar (Dichte, Temperatur, ...), so handelt es sich um ein *skalares Feld*. (Bild unten links)

Ist die physikalische Grösse ein Vektor (elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit, ...), handelt es sich um ein *Vektorfeld*. (Bild unten rechts)

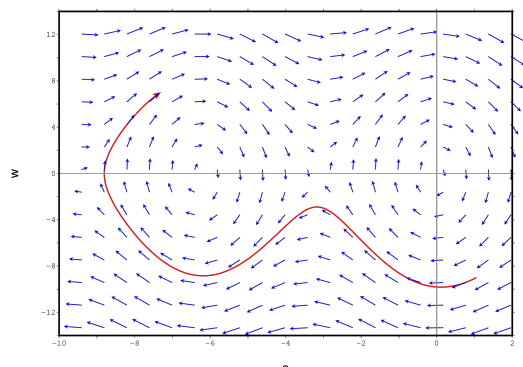


Skalare Felder können durch *Isolinien* oder *Isoflächen* veranschaulicht werden. Diese bestehen aus den Punkten mit dem gleichen Wert.

Das Bild unten zeigt Isolinien des skalaren Feldes mit $s = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ (einheitenlos).



Vektorfelder können durch *Feldlinien* veranschaulicht werden, welche die Richtung der Feldvektoren angeben. Zusätzlich können einzelne Pfeile eingezeichnet werden, wobei die Anschaulichkeit erhöht werden kann, indem die Länge der Pfeile proportional zu Feldstärke in ihrem jeweiligen Anfangspunkt gewählt werden.



3 Linienintegrale

Arbeit

$$W_{AB} = \int_{s_A}^{s_B} F_s \, ds$$

„nette“ Formel, aber: wie anwenden?

Idee: Weg nach der Zeit parametrisieren.

$\vec{r}(t)$: parametrisierte Kurve:

$$\Delta s = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

$\Delta t \rightarrow 0$:

$$ds = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot dt = \dot{\vec{r}}(t) \cdot dt = \vec{v}(t) \cdot dt$$

Damit gilt:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot dt$$

Beispiel 3.1

$$\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \left(-y, x, \frac{\beta}{z} \right) \quad \alpha, \beta \text{ const.}$$

$$\vec{r}(t) = (t^2, -t, \gamma), \quad \gamma \text{ const.}$$

Welche Arbeit wird entlang der Raumkurve zwischen den Punkten mit $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$ verrichtet?

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \alpha \left(t, t^2, \frac{\beta}{\gamma} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2t, -1, 0)$$

$$W = \int_1^5 \left(t, t^2, \frac{\beta}{\gamma} \right) \cdot (2t, -1, 0) \, dt = \alpha \int_1^5 (2t^2 - t^2) \, dt = \alpha \int_1^5 t^2 \, dt = \alpha \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^5 = \frac{124}{3} \alpha$$