

Vektoranalysis (Kapitel 3)

Übungen

Aufgabe 1

Ein Körper werde im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \begin{pmatrix} -y \\ x \\ \beta/z \end{pmatrix}$ entlang der

Raumkurve

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \\ \gamma \end{pmatrix}$ bewegt (α, β, γ seien Konstanten).

Welche Arbeit wird zwischen den Raumpunkten mit $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$ verrichtet?

Aufgabe 1

$$\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \begin{pmatrix} -y \\ x \\ \beta/z \end{pmatrix}; \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \alpha \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \beta/\gamma \end{pmatrix}; \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \alpha \int_1^5 \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \beta/\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \alpha \int_1^5 2t^2 - t^2 dt = \frac{\alpha}{3} [t^3]_1^5 = \frac{124}{3} \alpha$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Arbeit im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$ längs der

Raumkurve

$$\vec{r}(t) = \alpha \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t^3 + t^2 \end{pmatrix} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = 2 \text{ } (\alpha, \gamma \text{ sind Konstanten}).$$

Aufgabe 2

$$\text{Gegeben: } \vec{F}(\vec{r}) = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}; \vec{r}(t) = \alpha \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t^3 + t^2 \end{pmatrix}; t = 0 \text{ bis } t = 2$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \alpha\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -t^3 - t^2 \\ t \end{pmatrix}; \dot{\vec{r}}(t) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3t^2 + 2t \end{pmatrix}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \alpha^2\gamma \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -t^3 - t^2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3t^2 + 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \alpha^2\gamma \int_0^2 (-t^3 - t^2 + 3t^3 + 2t^2) dt = \alpha^2\gamma \int_0^2 (2t^3 + t^2) dt$$

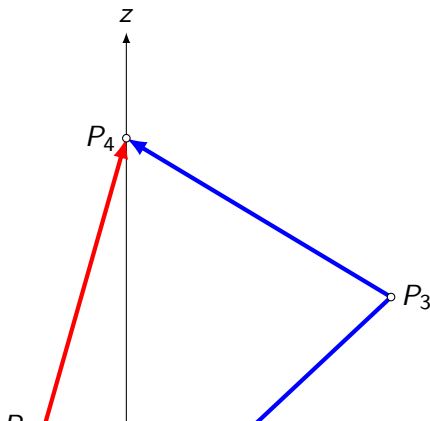
$$= \alpha^2\gamma \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \alpha^2\gamma \left(8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}\alpha^2\gamma$$

Aufgabe 3

Im Feld $\vec{F}(\vec{r}) = a(z, x, -y)^T$ soll die Arbeit entlang des Weges

$$P_1(1, -1, 1) \rightarrow P_2(2, 3, 1) \rightarrow P_3(0, 5, 3) \rightarrow P_4(0, 0, 6)$$

berechnet werden (siehe Abb. unten). Ferner soll geprüft werden, ob das Linienintegral von P_1 direkt nach P_4 den gleichen Wert ergibt.



Aufgabe 3

$$\text{Feld: } \vec{F}(\vec{r}) = a \begin{pmatrix} z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\text{Weg: } P_1(1, -1, 1) \rightarrow P_2(2, 3, 1) \rightarrow P_3(0, 5, 3) \rightarrow P_4(0, 0, 6)$$

$$\vec{r}_{12}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1+t \\ 4t-1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}_{23}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 3+2t \\ 1+2t \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}_{34}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5t \\ 3+3t \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$

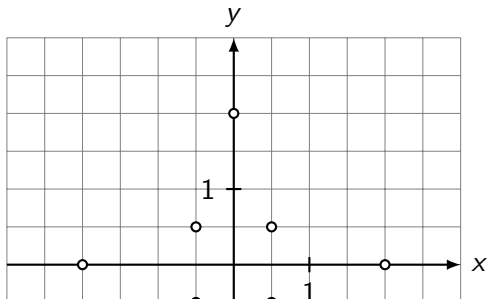
$$\vec{r}_{14}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \\ 1+5t \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$

Aufgabe 4

Gegeben sei das Kraftfeld $F(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{r}}{\|\vec{e}_3 \times \vec{r}\|^2} \text{ J}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Vereinfachen Sie die Darstellung von $\vec{F}(\vec{r})$ indem Sie das Vektorprodukt berechnen.
- (b) Skizzieren Sie Vektoren in den gekennzeichneten Punkten.



- (d) Wie lautet das Kraftfeld in der Parameterdarstellung, als Funktion von r_0 und φ ?
- (e) Berechnen Sie die Arbeit auf beiden Integrationswegen.
- (f) Welchen Wert hat das Linienintegral über einen geschlossenen Umlauf?

Aufgabe 4

Gegeben: $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{r}}{\|\vec{e}_3 \times \vec{r}\|^2} \text{ J}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ J}$

(b) *Vektorfeld:* Am Punkt $(x, y, 0)$ wird der $\vec{F} = (-y, x, 0)$ angeheftet.

