

Vektoranalysis (Kapitel 1)

Übungen

Aufgabe 1

Welche Bewegungsformen ergeben sich, falls

(a) $|\vec{r}(t)| = a = \text{const}$

(b) $\vec{r}(t) = \text{const}$

Aufgabe 1

(a) $|\vec{r}(t)| = \text{const}$

Bewegung auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius a .

(b) $\vec{r}(t) = \text{const}$

Geradlinige gleichförmige Bewegung auf einer Ursprungsgeraden

Aufgabe 2

Gegeben: Bahn $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ ct^2 \\ d/(t + e) \end{pmatrix}$ mit $t \neq -e$, $[t] = s$ und

$$[\vec{r}_x] = [\vec{r}_y] = [\vec{r}_z] = m.$$

- (a) Bestimme die Einheiten der Konstanten a , b , c , d und e .
- (b) An welchem Ort P befindet sich ein Massenpunkt zum Zeitpunkt $t = 5 s$, wenn er sich entlang der eingangs beschriebenen Bahn bewegt und die Bahnparameter die Werte $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 20$ und $e = 5$ haben?
- (c) Welche Geschwindigkeit hat ein Massenpunkt zum Zeitpunkt $t = 5 s$, wenn er sich entlang der in (b) beschriebenen Bahn bewegt?
- (d) Gegeben: $b = 2$, $c = 2$, $e = 2$
Gesucht: a , d und t , so dass $Q(8, 18, 3) \in \vec{r}(t)$

Aufgabe 2

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ ct^2 \\ d/(t + e) \end{pmatrix} \text{ mit } t \neq -e, [t] = \text{s und}$$

$$[\vec{r}_x] = [\vec{r}_y] = [\vec{r}_z] = \text{m}$$

(a) Einheiten der Konstanten:

$$[a] = \text{m}, [b] = \text{ms}^{-1}, [c] = \text{ms}^{-2}, [d] = \text{ms}, [e] = \text{s}$$

(b) Position für $t = 5 \text{ s}$ und $a = 3, b = 2, c = 4, d = 20, e = 5$:

$$\vec{r}(5) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 5^2 \\ 20/(5 + 5) \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 13 \\ 100 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ m}$$

(c) Geschwindigkeit für $t = 5 \text{ s}$ und $a = 3, b = 2, c = 4, d = 20, e = 5$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ 4t^2 \\ 20/(t + 5) \end{pmatrix} \text{ m} \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8t \\ -20/(t + 5)^2 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 2

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ ct^2 \\ d/(t + e) \end{pmatrix} \text{ mit } t \neq -e, [t] = \text{s und}$$

$$[\vec{r}_x] = [\vec{r}_y] = [\vec{r}_z] = \text{m}$$

(a) Einheiten der Konstanten:

$$[a] = \text{m}, [b] = \text{ms}^{-1}, [c] = \text{ms}^{-2}, [d] = \text{ms}, [e] = \text{s}$$

(b) Position für $t = 5 \text{ s}$ und $a = 3, b = 2, c = 4, d = 20, e = 5$:

$$\vec{r}(5) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 5^2 \\ 20/(5 + 5) \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 13 \\ 100 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ m}$$

(c) Geschwindigkeit für $t = 5 \text{ s}$ und $a = 3, b = 2, c = 4, d = 20, e = 5$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ 4t^2 \\ 20/(t + 5) \end{pmatrix} \text{ m} \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8t \\ -20/(t + 5)^2 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}(5 \text{ s}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 40 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 3

Schiefer Wurf in vektorieller Form: Eine Massenpunkt befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0\text{ s}$ am Ort $P_0(1, 2, 21)\text{ m}$. Er besitzt die Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der Massenpunkt bewegt sich unter dem Einfluss der konstanten Erdbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Luftwiderstand und weitere Kräfte werden vernachlässigt.

- (a) Bestimme die Gleichung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ dieser Bewegung.
- (b) Wann (für $t > 0$) und wo durchstösst die Masse die xy -Ebene?
- (c) Zu welchem Zeitpunkt $t > 0$ und an welchem Ort durchstösst

Aufgabe 3

Schiefer Wurf in vektorieller Form:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 21 \end{pmatrix} \text{ m}; \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}; \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(a) Gleichung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ -10t + C_z \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \xRightarrow{\vec{v}_0} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -10t + 8 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t + D_x \\ 4t + D_y \\ -5t^2 + 8t + D_z \end{pmatrix} \text{ m} \xRightarrow{\vec{r}_0}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 4t + 2 \\ -5t^2 + 8t + 21 \end{pmatrix} \text{ m}$$

(b) Wann und wo durchstösst die Masse die xy-Ebene?

$$z = 0 \Rightarrow -5t^2 + 8t + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$t_1 = 3 \text{ s} \Rightarrow Q(10, 14, 0)$$