Das Differenzial

Übungen

Aufgabe 1

Bestimme die Differenziale der Funktionen.

(a) $x(t) = A \cdot \sin(\omega t - \delta)$

(b) $W(h) = m \cdot g \cdot h$

(c) $s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$

(d) $p(t) = m\, v(t)$

Aufgabe 1

(a) $\mathrm{d}x = A\omega \sin(\omega t - \delta)\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 1

(a) $\mathrm{d}x = A\omega \sin(\omega t - \delta)\,\mathrm{d}t$

(b) $\mathrm{d}W = m \cdot g \cdot \mathrm{d}h$

Aufgabe 1

(a) $\mathrm{d}x = A\omega \sin(\omega t - \delta)\,\mathrm{d}t$

(b) $\mathrm{d}W = m \cdot g \cdot \mathrm{d}h$

(c) $\mathrm{d}s = (a_0 t + v_0)\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 1

(a) $\mathrm{d}x = A\omega \sin(\omega t - \delta)\,\mathrm{d}t$

(b) $\mathrm{d}W = m \cdot g \cdot \mathrm{d}h$

(c) $\mathrm{d}s = (a_0 t + v_0)\,\mathrm{d}t$

(d) $\mathrm{d}p = m \cdot \mathrm{d}v(t) = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t = m \cdot a(t) \cdot \mathrm{d}t$

Aufgabe 2

Bestimme das Differenzial bezüglich des angegebenen Arguments. Die übrigen Variablen können als konstant angenommen werden.

(a) $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

(b) $F(r) = G \, \frac{m_1 m_2}{r^2}$

(c) $p(h) = p_0 \left(1 - \frac{\alpha \cdot h}{T_0}\right)^\beta$

Aufgabe 2

(a) $\mathrm{d}s = (v_0 + at)\,\mathrm{d}t$

(b) $\mathrm{d}F = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{2r^3}\,\mathrm{d}r$

(c) $\mathrm{d}p = -\dfrac{p_0\alpha\beta}{T_0}\left(1 - \dfrac{\alpha \cdot h}{T_0}\right)^{\beta-1}\,\mathrm{d}h$

Aufgabe 3

Eine Strecke von 1.8 km werde in 0.47 h zurückgelegt. Beide Grössen weisen eine relative Fehlerschranke von 5% auf. Berechne die mittlere Geschwindigkeit mit absoluter und relativer Fehlerschranke.

Aufgabe 3

$$s = (1.8 \pm 0.09)\,\mathrm{km}$$

$$t = (0.47 \pm 0.024)\,\mathrm{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

Aufgabe 3

$$s = (1.8 \pm 0.09)\,\text{km}$$

$$t = (0.47 \pm 0.024)\,\text{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\Delta v \approx \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| \cdot \Delta s + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \cdot \Delta t = \left|\frac{1}{t}\right| \cdot \Delta s + \left|-\frac{s}{t^2}\right| \cdot \Delta t$$

$$= \frac{1}{0.47\,\text{h}} \cdot 0.09\,\text{km} + \frac{1.8\,\text{km}}{0.47^2\,\text{h}^2} \cdot 0.024\,\text{h} = 0.39\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 3

$$s = (1.8 \pm 0.09)\,\mathrm{km}$$

$$t = (0.47 \pm 0.024)\,\mathrm{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\Delta v \approx \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| \cdot \Delta s + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \cdot \Delta t = \left|\frac{1}{t}\right| \cdot \Delta s + \left|-\frac{s}{t^2}\right| \cdot \Delta t$$

$$= \frac{1}{0.47\,\mathrm{h}} \cdot 0.09\,\mathrm{km} + \frac{1.8\,\mathrm{km}}{0.47^2\,\mathrm{h}^2} \cdot 0.024\,\mathrm{h} = 0.39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1.8\,\mathrm{km}}{0.47\,\mathrm{h}} = 3.83\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Aufgabe 3

$$s = (1.8 \pm 0.09)\,\mathrm{km}$$

$$t = (0.47 \pm 0.024)\,\mathrm{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\Delta v \approx \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| \cdot \Delta s + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \cdot \Delta t = \left|\frac{1}{t}\right| \cdot \Delta s + \left|-\frac{s}{t^2}\right| \cdot \Delta t$$

$$= \frac{1}{0.47\,\mathrm{h}} \cdot 0.09\,\mathrm{km} + \frac{1.8\,\mathrm{km}}{0.47^2\,\mathrm{h}^2} \cdot 0.024\,\mathrm{h} = 0.39\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1.8\,\mathrm{km}}{0.47\,\mathrm{h}} = 3.83\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v = (3.83 \pm 0.39)\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \qquad \text{(absolut)}$$

Aufgabe 3

$$s = (1.8 \pm 0.09)\,\mathrm{km}$$

$$t = (0.47 \pm 0.024)\,\mathrm{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\Delta v \approx \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| \cdot \Delta s + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \cdot \Delta t = \left|\frac{1}{t}\right| \cdot \Delta s + \left|-\frac{s}{t^2}\right| \cdot \Delta t$$

$$= \frac{1}{0.47\,\mathrm{h}} \cdot 0.09\,\mathrm{km} + \frac{1.8\,\mathrm{km}}{0.47^2\,\mathrm{h}^2} \cdot 0.024\,\mathrm{h} = 0.39\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1.8\,\mathrm{km}}{0.47\,\mathrm{h}} = 3.83\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v = (3.83 \pm 0.39)\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \qquad \text{(absolut)}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{0.39}{3.83} = 0.10 \qquad \text{(relativ)}$$

Aufgabe 4

Ein Zimmer wird eingerichtet. An einer Wand sollen ein Bett, ein Schrank und ein Tisch nebeneinander stehen. Mit einem Messband wurden folgende Längen bestimmt:

- Bett: 2 Meter
- Schrank: 80 cm
- Tisch: 1 Meter

Gemäss Wohnungsgrundriss beträgt die Länge der Wand 3.85 m. Passen alle drei Möbelstücke nebeneinander an die Wand, wenn mit einer Genauigkeit von ± 3 cm gemessen wurde?

Aufgabe 4

- Bett: $s_1 = 2\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Schrank: $s_2 = 0.8\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Tisch: $s_3 = 1.0\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$

Aufgabe 4

- Bett: $s_1 = 2\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Schrank: $s_2 = 0.8\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Tisch: $s_3 = 1.0\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

Aufgabe 4

- Bett: $s_1 = 2\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Schrank: $s_2 = 0.8\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Tisch: $s_3 = 1.0\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left|\frac{\partial s}{\partial s_1}\right| \cdot \Delta s_1 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_2}\right| \cdot \Delta s_2 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_3}\right| \cdot \Delta s_3 \\ &= 1 \cdot \Delta s_1 + 1 \cdot \Delta s_2 + 1 \cdot \Delta s_3 = 3 \cdot 0.03\,\mathrm{m} = 0.09\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Aufgabe 4

- Bett: $s_1 = 2\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Schrank: $s_2 = 0.8\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Tisch: $s_3 = 1.0\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left|\frac{\partial s}{\partial s_1}\right| \cdot \Delta s_1 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_2}\right| \cdot \Delta s_2 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_3}\right| \cdot \Delta s_3 \\ &= 1 \cdot \Delta s_1 + 1 \cdot \Delta s_2 + 1 \cdot \Delta s_3 = 3 \cdot 0.03\,\mathrm{m} = 0.09\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 2.0 + 0.8 + 1.0 = 3.8\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 4

- Bett: $s_1 = 2\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Schrank: $s_2 = 0.8\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Tisch: $s_3 = 1.0\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left|\frac{\partial s}{\partial s_1}\right| \cdot \Delta s_1 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_2}\right| \cdot \Delta s_2 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_3}\right| \cdot \Delta s_3 \\ &= 1 \cdot \Delta s_1 + 1 \cdot \Delta s_2 + 1 \cdot \Delta s_3 = 3 \cdot 0.03\,\mathrm{m} = 0.09\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 2.0 + 0.8 + 1.0 = 3.8\,\mathrm{m}$$

$$s = (3.80 \pm 0.09)\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 4

- Bett: $s_1 = 2\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Schrank: $s_2 = 0.8\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$
- Tisch: $s_3 = 1.0\,\mathrm{m} \pm 0.03\,\mathrm{m}$

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left|\frac{\partial s}{\partial s_1}\right| \cdot \Delta s_1 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_2}\right| \cdot \Delta s_2 + \left|\frac{\partial s}{\partial s_3}\right| \cdot \Delta s_3 \\ &= 1 \cdot \Delta s_1 + 1 \cdot \Delta s_2 + 1 \cdot \Delta s_3 = 3 \cdot 0.03\,\mathrm{m} = 0.09\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 2.0 + 0.8 + 1.0 = 3.8\,\mathrm{m}$$

$$s = (3.80 \pm 0.09)\,\mathrm{m}$$

Bei einer Wandlänge von $3.85\,\mathrm{m}$ passen die drei Möbelstücke möglicherweise nicht mehr nebeneinander an die Wand.

Aufgabe 5

Für eine Grösse F gilt $F(A, B) = c \cdot A \cdot B$ wobei c eine Konstante und A, B Grössen mit den Maximalfehlern $\pm\Delta A$ bzw. $\pm\Delta B$ sind. Zeige, dass der relative Fehler von F die Summe der relativen Fehler von A und B ist.

Aufgabe 5

$$F(A, B) = c \cdot A \cdot B$$

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial A} \right| \cdot \Delta A + \left| \frac{\partial F}{\partial B} \right| \cdot \Delta B = |c \cdot B| \cdot \Delta A + |c \cdot A| \cdot \Delta B$$

$$\frac{\Delta F}{|F|} = \frac{|c \cdot B| \cdot \Delta A + |c \cdot A| \cdot \Delta B}{|c \cdot A \cdot B|} = \frac{\Delta A}{|A|} + \frac{\Delta B}{|B|}$$

Aufgabe 6

Bestimme das (un)bestimmte Integral mit einer Typ-1-Substitution.

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2z+1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z$

Aufgabe 6

(a) $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

Aufgabe 6

(a) $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{x} \cdot x\,\mathrm{d}u = \int u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + \tilde{C} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

(b) $u = z^2 + z \Rightarrow \mathrm{d}u = (2z+1) \cdot \mathrm{d}z \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{1}{2z+1} \cdot \mathrm{d}u$

Aufgabe 6

(a) $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{x} \cdot x\,\mathrm{d}u = \int u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + \tilde{C} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

(b) $u = z^2 + z \Rightarrow \mathrm{d}u = (2z+1) \cdot \mathrm{d}z \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{1}{2z+1} \cdot \mathrm{d}u$

$$\int_1^2 \frac{2z+1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z = \int_2^6 \frac{2z+1}{u} \cdot \frac{1}{2z+1}\,\mathrm{d}u = \int_2^6 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[\ln u\right]_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$$

Aufgabe 6

(a) $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{x} \cdot x\,\mathrm{d}u = \int u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + \tilde{C} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

(b) $u = z^2 + z \Rightarrow \mathrm{d}u = (2z+1) \cdot \mathrm{d}z \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{1}{2z+1} \cdot \mathrm{d}u$

$$\int_1^2 \frac{2z+1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z = \int_2^6 \frac{2z+1}{u} \cdot \frac{1}{2z+1}\,\mathrm{d}u = \int_2^6 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[\ln u\right]_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$$

(c) $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \mathrm{d}u$

(c) $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \mathrm{d}u$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}u = \int_0^1 u \, \mathrm{d}u$$

$$= \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = 0.5 - 0 = 0.5$$

Aufgabe 7

Bestimme das (un)bestimmte Integral mit der vorgegebenen Typ-2-Substitution.

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 1}\, dx, \quad x(t) = \ln t$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x} \ln x^2\, dx, \quad x(t) = e^t$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx, \quad x(t) = t^2$

Aufgabe 7

(a) $x(t) = \ln t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 7

(a) $x(t) = \ln t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$x_1 = 0 = \ln t \Rightarrow t_1 = 1$

$x_2 = 1 = \ln t \Rightarrow t_2 = \mathrm{e}$

Aufgabe 7

(a) $x(t) = \ln t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$$x_1 = 0 = \ln t \Rightarrow t_1 = 1$$

$$x_2 = 1 = \ln t \Rightarrow t_2 = \mathrm{e}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\ln t} \sqrt{\mathrm{e}^{\ln t} + 1} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} t\sqrt{t+1} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \tfrac{2}{3}\left[(\mathrm{e}+1)^{3/2} - 2^{3/2}\right] \approx 2.89\end{aligned}$$

(b) $x(t) = e^t$

$$dx = e^t \, dt$$

(b) $x(t) = \mathrm{e}^t$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

$$x_1 = 1 = \mathrm{e}^t \Rightarrow t_1 = 0$$

$$x_2 = 3 = \mathrm{e}^t \Rightarrow t_2 = \ln 3$$

(b) $x(t) = e^t$

$$dx = e^t \, dt$$

$$x_1 = 1 = e^t \Rightarrow t_1 = 0$$

$$x_2 = 3 = e^t \Rightarrow t_2 = \ln 3$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x} \ln x^2 \, dx = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^t} \ln \left(e^t\right)^2 \cdot e^t \, dt = \int_0^{\ln 3} 2t \, dt$$

$$= \left[t^2\right]_0^{\ln 3} = (\ln 3)^2 = 1.207$$

(c) $x(t) = t^2$

$$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

(c) $x(t) = t^2$

$$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$x_1 = 0 = t^2 \Rightarrow t_1 = 0$$

$$x_2 = 1 = t^2 \Rightarrow t_2 = 1$$

(c) $x(t) = t^2$

$$dx = 2t\,dt$$

$$x_1 = 0 = t^2 \Rightarrow t_1 = 0$$

$$x_2 = 1 = t^2 \Rightarrow t_2 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t^2}} \cdot 2t\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2t}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 1\,dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= 2\big[t\big]_0^1 - 2\big[\ln(t+1)\big]_0^1 = 2 - 2\ln 2 = 0.614$$

Aufgabe 8

Berechne die Bogenlängen des Graphen von f für $x \in I$. Die in den Aufgaben (d)–(f) entstehenden Integrale können mit dem Taschenrechner berechnet werden.

(a) $f(x) = 4,\ I = [5, 9]$
(b) $f(x) = 2x,\ I = [1, 3]$
(c) $f(x) = \frac{2}{3}(x - 1)^{3/2},\ I = [0, 9]$
(d) $f(x) = x^2,\ I = [0, 2]$
(e) $f(x) = \sqrt{x},\ I = [0, 4]$
(f) $f(x) = e^x,\ I = [0, 1]$

Aufgabe 8

(a) $s = \int_5^9 \sqrt{1 + \left[(4)'\right]^2} \mathrm{d}x = \int_5^9 \sqrt{1} \mathrm{d}x = [x]_5^9$

$= 9 - 5 = 4$

Aufgabe 8

(a) $$s = \int_5^9 \sqrt{1 + \left[(4)'\right]^2} \mathrm{d}x = \int_5^9 \sqrt{1} \mathrm{d}x = [x]_5^9$$
$$= 9 - 5 = 4$$

(b) $$s = \int_1^3 \sqrt{1 + \left[(2x)'\right]^2} \, \mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{1+4} \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_1^3 \sqrt{5} \, \mathrm{d}x = \sqrt{5} \left[x\right]_1^3 = 2\sqrt{5}$$

(c) $$s = \int_0^9 \sqrt{1 + \left[\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^9 \sqrt{1 + \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = 18$$

(c) $s = \int_0^9 \sqrt{1 + \left[\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^9 \sqrt{1 + \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = 18$$

(d) $s = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{TR}}{\approx} 4.647$

(c) $$s = \int_0^9 \sqrt{1 + \left[\left(\tfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^9 \sqrt{1 + \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = 18$$

(d) $$s = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{TR}}{\approx} 4.647$$

(e) $$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{TR}}{\approx} 4.647$$

(c) $$s = \int_0^9 \sqrt{1 + \left[\left(\tfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^9 \sqrt{1 + \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = 18$$

(d) $$s = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{TR}}{\approx} 4.647$$

(e) $$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{TR}}{\approx} 4.647$$

(f) $$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{TR}}{\approx} 2.003$$

Aufgabe 9

Skizziere die Parameterkurve für $I = [t_1, t_2]$ mit einer geeigneten Software und berechne ihre Bogenlänge.

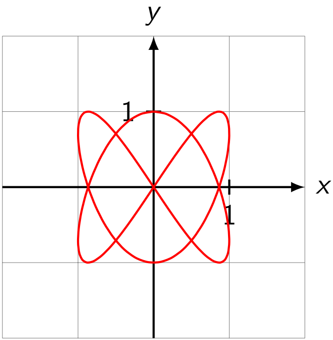
(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$, $I = [0, 2\pi]$ (mit TR)

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, $I = [0, 2\pi]$

Aufgabe 9

(a) $x(t) = \sin(2t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = 2\cos(2t)$

$y(t) = \sin(3t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = 3\cos(3t)$

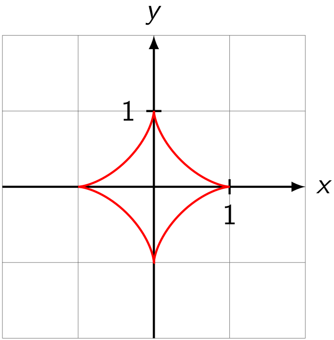


$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\cos 2t)^2 + (3\cos 3t)^2}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2(2t) + 9\cos^2(3t)}\, \mathrm{d}t = 15.29$$

(b) $x(t) = \sin^3(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -3\sin^2(t)\cos(t)$

$y(t) = \cos^3(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = 3\cos^2(t)\sin(t)$



$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\cos 2t)^2 + (3\cos 3t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 9\cos^2 3t}\,\mathrm{d}t = 15.29$$

Aufgabe 10

Skizziere die Kurve in Polarform für $I = [\varphi_1, \varphi_2]$ und berechne ihre Bogenlänge.

(a) $r(\varphi) = 1 + 1/2\pi \cdot \varphi$, $I = [0, 6\pi]$

Aufgabe 10

Skizziere die Kurve in Polarform für $I = [\varphi_1, \varphi_2]$ und berechne ihre Bogenlänge.

(a) $r(\varphi) = 1 + 1/2\pi \cdot \varphi$, $I = [0, 6\pi]$

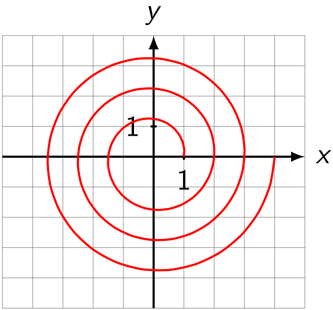
(b) $r(\varphi) = 2 + \sin(6\varphi)$, $I = [0, 2\pi]$

Aufgabe 10

(a) $r(\varphi) = 1 + \dfrac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}$

Aufgabe 10

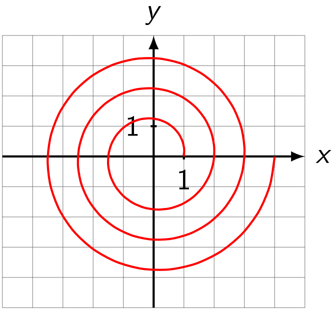
(a) $r(\varphi) = 1 + \dfrac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}$



$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$$

Aufgabe 10

(a) $r(\varphi) = 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

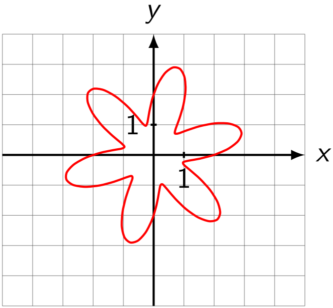


$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$$

$$= \int_0^{6\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{4\pi^2}}\, \mathrm{d}t \approx 47.23$$

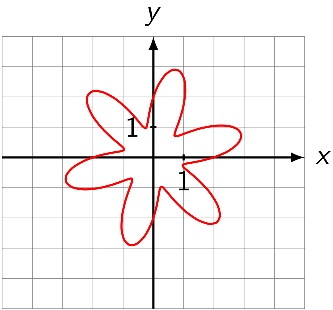
(b) $r(\varphi) = 2 + \sin(6\varphi) \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = 6\cos(6\varphi)$

(b) $r(\varphi) = 2 + \sin(6\varphi) \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = 6\cos(6\varphi)$



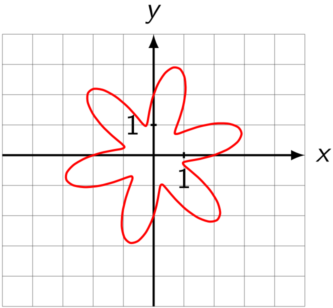
$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

(b) $r(\varphi) = 2 + \sin(6\varphi) \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = 6\cos(6\varphi)$



$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2+\sin 6\varphi)^2 + (6\cos 6\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

(b) $r(\varphi) = 2 + \sin(6\varphi) \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = 6\cos(6\varphi)$



$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2+\sin 6\varphi)^2 + (6\cos 6\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi \approx 28.18$$