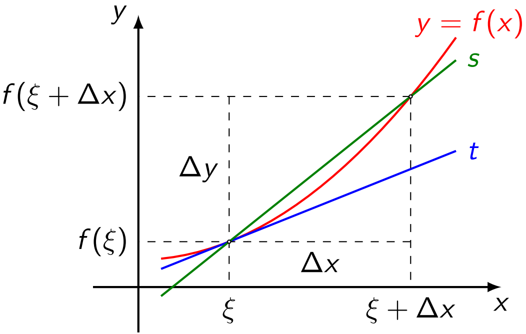
AM1: Das Differenzial


y
$y = f(x)$
s
$f(\xi + \Delta x)$
t
Δy
$f(\xi)$
Δx
ξ
$\xi + \Delta x$
x

Wir setzen voraus, dass die Funktion f an der Stelle ξ [sprich *xi*] differenzierbar ist.

Mit φ bezeichnen wir die Differenz zwischen dem Differenzen- und dem Differenzialquotienten. Geometrisch entspricht dies dem Unterschied zwischen der Sekanten- und der Tangentensteigung.

Für eine bestimmte Stelle ξ hängt diese Differenz von Δx ab. Daher fassen wir φ als eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ auf.

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x$: Konvergenz von höherer als 1. Ordnung

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x$: Konvergenz von höherer als 1. Ordnung

$\mathrm{d}y \overset{\text{Def.}}{=} f'(\xi) \cdot \Delta x$ *Differenzial* von f an der Stelle ξ

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x$: Konvergenz von höherer als 1. Ordnung

$\mathrm{d}y \overset{\text{Def.}}{=} f'(\xi) \cdot \Delta x$ *Differenzial* von f an der Stelle ξ

Für $y = x$ gilt insbesondere $\mathrm{d}y = 1 \cdot \Delta x = \mathrm{d}x$ und damit:

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\substack{\downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x$: Konvergenz von höherer als 1. Ordnung

$\mathrm{d}y \overset{\text{Def.}}{=} f'(\xi) \cdot \Delta x$ *Differenzial* von f an der Stelle ξ

Für $y = x$ gilt insbesondere $\mathrm{d}y = 1 \cdot \Delta x = \mathrm{d}x$ und damit:

$\boxed{\mathrm{d}y = f'(\xi) \cdot \mathrm{d}x}$ (dx ist „kleine" *endliche* Grösse)

- $\mathrm{d}(f \pm g) =$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) =$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) =$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) =$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$
- $\mathrm{d}f\big(g(x)\big)$

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$
- $\mathrm{d}f\big(g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

(b) $g(x) = \sin x$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = \cos x \cdot \mathrm{d}x$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = \cos x \cdot \mathrm{d}x$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = \cos x \cdot \mathrm{d}x$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{d}t$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = \cos x \cdot \mathrm{d}x$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{d}t$

(d) $z(x) = \cos(4x)$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = \cos x \cdot \mathrm{d}x$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{d}t$

(d) $z(x) = \cos(4x) \quad \Rightarrow$
$\mathrm{d}z \overset{y=4x}{=} -\sin(y) \cdot \mathrm{d}y = -\sin(4x) \cdot 4 \cdot \mathrm{d}x$

Beispiel

Der Durchmesser einer Stahlkugel wird mit einer Messschraube mit einer maximalen Messabweichung von $\pm 0.01\,\text{mm}$ bestimmt.

Aus dem Messwert $d = 12.04\,\text{mm}$ wird anschliessend das Volumen der Kugel bestimmt. Schätze den absoluten und den relative Fehler des Volumens.

$$\Delta V = V(d + \Delta d) - V(d) \approx V'(d) \cdot \Delta d$$

Beispiel

Der Durchmesser einer Stahlkugel wird mit einer Messschraube mit einer maximalen Messabweichung von $\pm 0.01\,\mathrm{mm}$ bestimmt.

Aus dem Messwert $d = 12.04\,\mathrm{mm}$ wird anschliessend das Volumen der Kugel bestimmt. Schätze den absoluten und den relative Fehler des Volumens.

$$\Delta V = V(d + \Delta d) - V(d) \approx V'(d) \cdot \Delta d$$

$$V(d) = \frac{4\pi(d/2)^3}{3} = \frac{4\pi d^3/8}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V'(d) = \frac{\pi d^2}{2}$$

Beispiel

Der Durchmesser einer Stahlkugel wird mit einer Messschraube mit einer maximalen Messabweichung von $\pm 0.01\,\mathrm{mm}$ bestimmt.

Aus dem Messwert $d = 12.04\,\mathrm{mm}$ wird anschliessend das Volumen der Kugel bestimmt. Schätze den absoluten und den relative Fehler des Volumens.

$$\Delta V = V(d + \Delta d) - V(d) \approx V'(d) \cdot \Delta d$$

$$V(d) = \frac{4\pi(d/2)^3}{3} = \frac{4\pi d^3/8}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V'(d) = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$\Delta V = \frac{\pi \cdot 12.04^2\,\mathrm{mm}^2}{2} \cdot 0.01\,\mathrm{mm} = 2.3\,\mathrm{mm}^3 \ (\textit{absoluter Fehler})$$

Beispiel

Der Durchmesser einer Stahlkugel wird mit einer Messschraube mit einer maximalen Messabweichung von $\pm 0.01\,\text{mm}$ bestimmt.

Aus dem Messwert $d = 12.04\,\text{mm}$ wird anschliessend das Volumen der Kugel bestimmt. Schätze den absoluten und den relative Fehler des Volumens.

$$\Delta V = V(d + \Delta d) - V(d) \approx V'(d) \cdot \Delta d$$

$$V(d) = \frac{4\pi(d/2)^3}{3} = \frac{4\pi d^3/8}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V'(d) = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$\Delta V = \frac{\pi \cdot 12.04^2\,\text{mm}^2}{2} \cdot 0.01\,\text{mm} = 2.3\,\text{mm}^3 \ (\textit{absoluter Fehler})$$

$$V = \frac{\pi \cdot 12.04^3}{6} = 913.9\,\text{mm}^3 \quad \Rightarrow \quad V = (913.9 \pm 2.3)\,\text{mm}^3$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2.3\,\mathrm{mm}^3}{913.9\,\mathrm{mm}^3} = 0.0025 \qquad (\textit{relativer Fehler})$$

Abschätzung des Maximalfehlers

- Eine Grösse F setzt sich aus direkt messbaren und unabhängigen Grössen x, y, ... zusammen: $F = F(x, y, \dots)$
- Für jede Grösse sind ein Mittelwert (z. B. aus Messwiederholungen) und eine Fehlerschranke (z. B. die maximale Abweichung vom Mittelwert) bekannt.
  $$\overline{F} = F(\overline{x}, \overline{y}, \dots)$$
  $$\Delta F = F(\overline{x} + \Delta x, \overline{y} + \Delta y, \dots) - F(\overline{x}, \overline{y}, \dots)$$
- Fehlerfortpflanzungsgesetz für den Maximalfehler:
  $$\Delta F \approx \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \dots$$

Beispiel

Der Durchmesser d und die Höhe h wurden zur Volumenbestimmung eines Zylinders gemessen. Wie gross ist die Messunsicherheit des Volumens?

$d = (17.0 \pm 0.2)\,\text{mm}$ und $h = (46.8 \pm 0.4)\,\text{mm}$

Beispiel

Der Durchmesser d und die Höhe h wurden zur Volumenbestimmung eines Zylinders gemessen. Wie gross ist die Messunsicherheit des Volumens?

$d = (17.0 \pm 0.2)\,\mathrm{mm}$ und $h = (46.8 \pm 0.4)\,\mathrm{mm}$

$$\Delta F \approx \left|\frac{\partial F}{\partial d}\right| \Delta d + \left|\frac{\partial F}{\partial h}\right| \Delta h = \left|\frac{\pi}{2} dh\right| \Delta d + \left|\frac{\pi}{4} d^2\right| \Delta h = 34\,\mathrm{mm}^3$$

Beispiel

Der Durchmesser d und die Höhe h wurden zur Volumenbestimmung eines Zylinders gemessen. Wie gross ist die Messunsicherheit des Volumens?

$d = (17.0 \pm 0.2)\,\text{mm}$ und $h = (46.8 \pm 0.4)\,\text{mm}$

$$\Delta F \approx \left|\frac{\partial F}{\partial d}\right| \Delta d + \left|\frac{\partial F}{\partial h}\right| \Delta h = \left|\frac{\pi}{2} dh\right| \Delta d + \left|\frac{\pi}{4} d^2\right| \Delta h = 34\,\text{mm}^3$$

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h = 10\,623\,\text{mm}^3$$

Beispiel

Der Durchmesser d und die Höhe h wurden zur Volumenbestimmung eines Zylinders gemessen. Wie gross ist die Messunsicherheit des Volumens?

$d = (17.0 \pm 0.2)\,\text{mm}$ und $h = (46.8 \pm 0.4)\,\text{mm}$

$$\Delta F \approx \left|\frac{\partial F}{\partial d}\right| \Delta d + \left|\frac{\partial F}{\partial h}\right| \Delta h = \left|\frac{\pi}{2} dh\right| \Delta d + \left|\frac{\pi}{4} d^2\right| \Delta h = 34\,\text{mm}^3$$

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h = 10\,623\,\text{mm}^3$$

$$V = (10\,623 \pm 34)\,\text{mm}^3$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Substitution: $u = x^2 + 1$ (u als Funktion von x)

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Substitution: $u = x^2 + 1$ (u als Funktion von x)

Differenzial bestimmen und nach dx auflösen:

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Substitution: $u = x^2 + 1$ (u als Funktion von x)

Differenzial bestimmen und nach $\mathrm{d}x$ auflösen:

$$\mathrm{d}u = 2x \cdot \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x} \cdot \mathrm{d}u$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Substitution: $u = x^2 + 1$ (u als Funktion von x)

Differenzial bestimmen und nach $\mathrm{d}x$ auflösen:

$$\mathrm{d}u = 2x \cdot \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x} \cdot \mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}\,\Big|_{u=1}^{u=2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}\Big|_{u=1}^{u=2} = \sqrt{u}\,\Big|_{u=1}^{u=2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot u^{\frac{1}{2}}\Big|_{u=1}^{u=2} = \sqrt{u}\Big|_{u=1}^{u=2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}\Big|_{u=1}^{u=2} = \sqrt{u}\,\Big|_{u=1}^{u=2}$$
$$= \sqrt{2} - 1$$

Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für u wieder rückgängig:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \cdots = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

Formale Beschreibung der Substitution 1. Art

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, \mathrm{d}u$$

Beispiel

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Anstatt einen geeigneten Teilausdruck durch eine Funktion zu ersetzen, wird hier die Integrationsvariable als Funktion einer neuen Variable aufgefasst. Das Ziel: den Integranden so zu verändern, dass die Integration möglich wird.

$$x(t) = \sin t$$

$$x(t) = \sin t \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} x(t)\colon -1 \to 1 \\ t\colon -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$x(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} x(t)\colon -1 \to 1 \\ t\colon -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\ldots = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{|\cos t|} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}t \quad \left(0 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left[t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für $x(t)$ wieder rückgängig:

$$x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin(x)$$

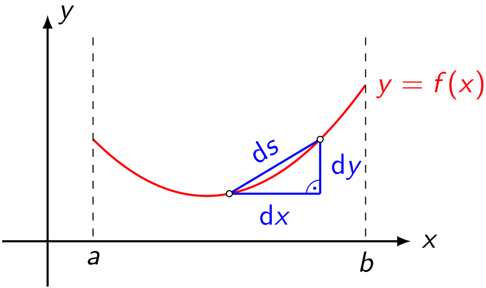
Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für $x(t)$ wieder rückgängig:

$$x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin(x)$$

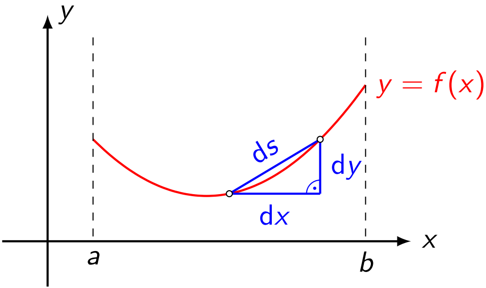
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \cdots = t + C = \arcsin(x) + C$$

Formale Beschreibung der Substitution 2. Art

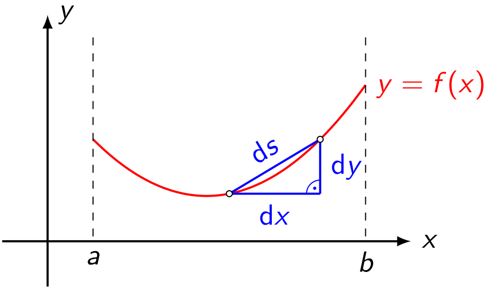
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f\bigl(x(t)\bigr)x'(t)\,\mathrm{d}t$$



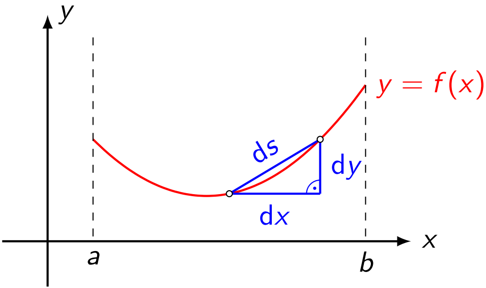
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \big(df(x)\big)^2}$$

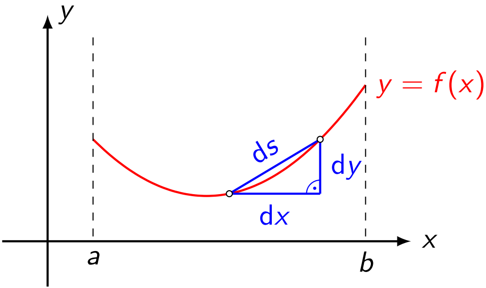


$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(\mathrm{d}f(x)\right)^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(f'(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$



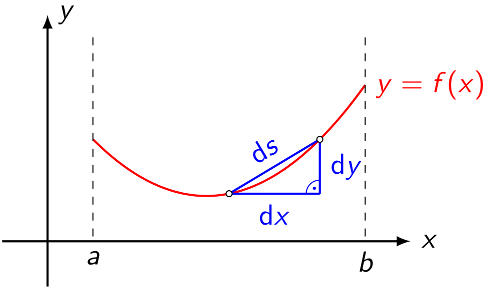
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \big(\mathrm{d}f(x)\big)^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \big(f'(x)\mathrm{d}x\big)^2}$$

$$= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x^2}$$



$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(\mathrm{d}f(x)\right)^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(f'(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

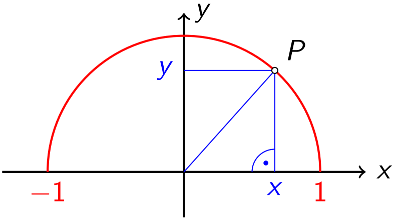


$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(\mathrm{d}f(x)\right)^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(f'(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

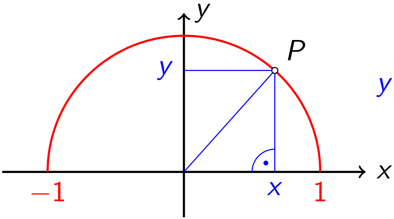
$$= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad s = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

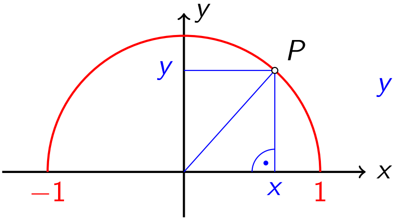


Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

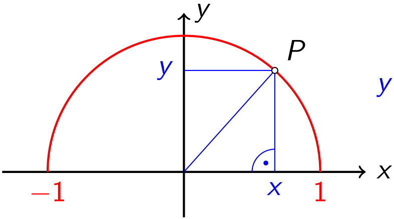
Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x)$$

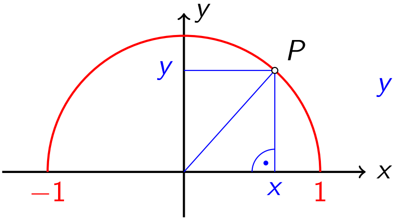
Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x)$$

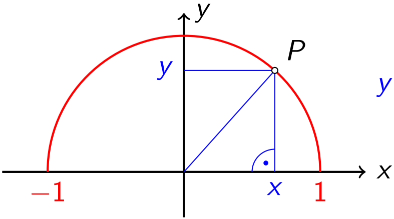
Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

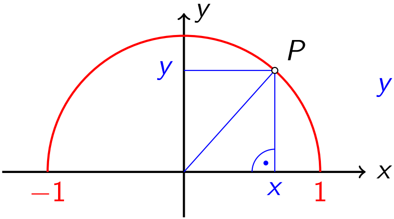


$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

s

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

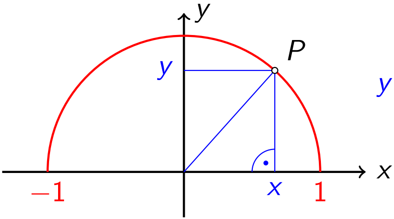


$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

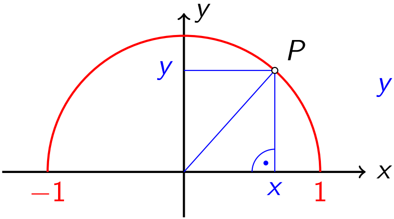


$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

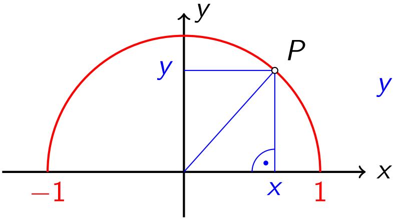


$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



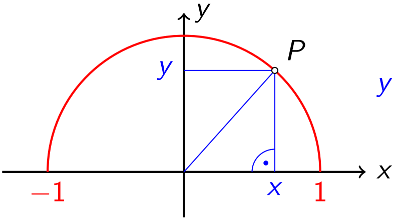
$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\Big[\arcsin x\Big]_0^1$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



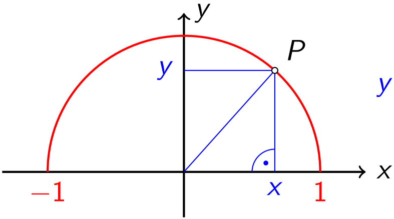
$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\Big[\arcsin x\Big]_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

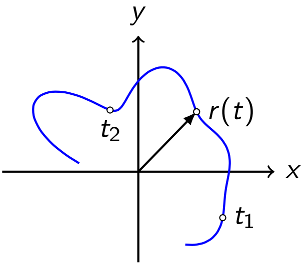
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

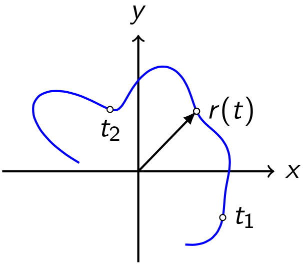
$$= 2\Big[\arcsin x\Big]_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Bemerkung

Oft gibt es für ein Bogenlängen-Integral keine geschlossene Stammfunktion. In diesem Fall müssen zur Berechnung numerische Näherungsverfahren verwendet werden ($\rightarrow$ TR).

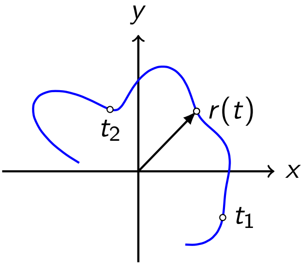


$$k: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



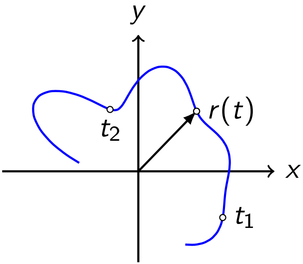
$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$



$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

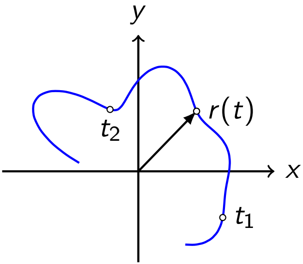
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left[\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$



$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left[\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

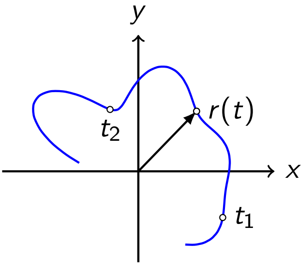
$$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$



$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left[\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

$$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

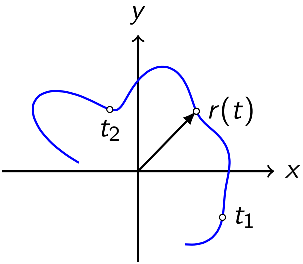


$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left[\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

$$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s$$

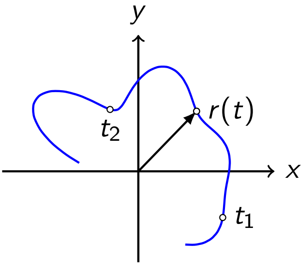


$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left[\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

$$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$



$$k:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left[\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

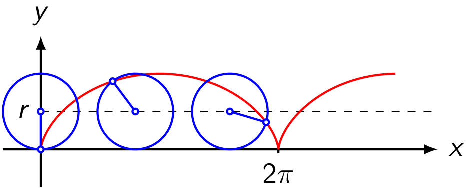
$$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r\sin t$$

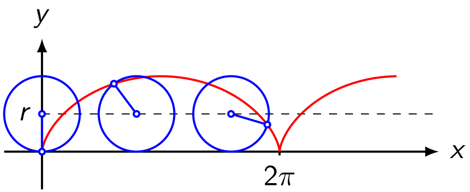
$$y(t) = r - r\cos t$$



Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r\sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = r - r\cos t$$

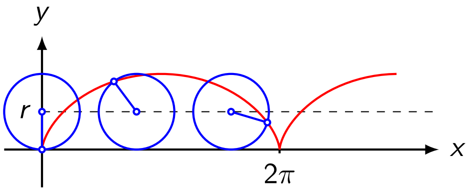
$$y(t) = r - r\cos t$$



Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r\sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = r - r\cos t$$

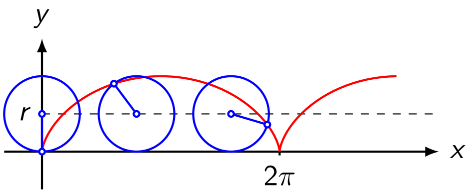
$$y(t) = r - r\cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = r\sin t$$



Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r\sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = r - r\cos t$$

$$y(t) = r - r\cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = r\sin t$$

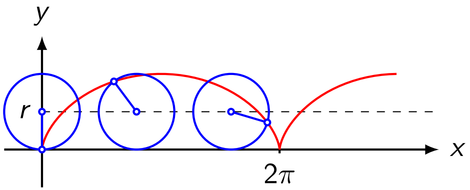


ds

Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r\sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = r - r\cos t$$

$$y(t) = r - r\cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = r\sin t$$

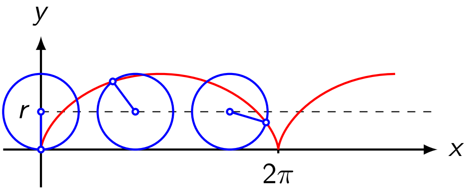


$$\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r\sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = r - r\cos t$$

$$y(t) = r - r\cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = r\sin t$$



$$\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(r^2 - 2r^2\cos t + r^2\cos^2 t\right) + r^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

ds

$$ds = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,dt$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \dots$$

Substitution: $t = 2u$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t : 0 \to 2\pi \\ u : 0 \to \pi \end{array}$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t: 0 \to 2\pi \\ u: 0 \to \pi \end{array}$

s

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad t: 0 \to 2\pi$

$u: 0 \to \pi$

$$s = \sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2u}\,2\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}s = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2} r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad t: 0 \to 2\pi$

$u: 0 \to \pi$

$$s = \sqrt{2} r \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2u}\, 2\mathrm{d}u = 2\sqrt{2} r \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t : 0 \to 2\pi \\ u : 0 \to \pi \end{array}$

$$s = \sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2u}\, 2\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

$$ds = r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt = \dots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad dt = 2\,du \quad \Rightarrow \quad t: 0 \to 2\pi$

$u: 0 \to \pi$

$$s = \sqrt{2}r\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2u}\,2du = 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos^2 u+\sin^2 u}\,du$$

$$= 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 u}\,du = 4r\int_0^{\pi}|\sin u|\,du$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \dots$$

Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad t: 0 \to 2\pi$

$u: 0 \to \pi$

$$s = \sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2u}\,2\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 u+\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = 4r\int_0^{\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u$$

$$= 4r\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Substitution: $t = 2u \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad\Rightarrow\quad t: 0 \to 2\pi$

$u: 0 \to \pi$

$$s = \sqrt{2}r\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2u}\,2\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos^2 u+\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = 4r\int_0^{\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u$$

$$= 4r\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = 4r(1+1)$$

$$\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t = \dots$$

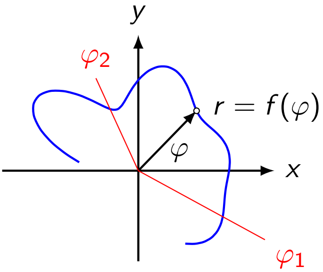
Substitution: $t = 2u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad t: 0 \to 2\pi$

$u: 0 \to \pi$

$$s = \sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2u}\,2\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = 4r\int_0^{\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u$$

$$= 4r\big[-\cos u\big]_0^{\pi} = 4r(1+1) = 8r$$


y
φ_2
$r = f(\varphi)$
φ
x
φ_1

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$x'(\varphi)$

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad$ (Produktregel)

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi$ (Produktregel)

$y'(\varphi)$

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin\varphi + f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$
$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin\varphi + f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

s

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin\varphi + f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, \mathrm{d}\varphi$$

Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin\varphi + f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \ldots$$

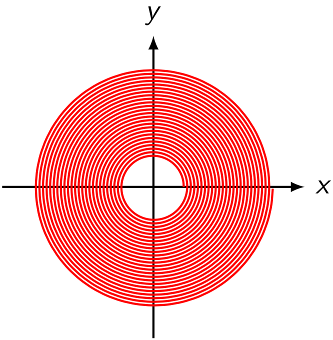
Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$
$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$
$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin\varphi + f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, \mathrm{d}\varphi$$
$$= \ldots$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\, \mathrm{d}\varphi$$

Beispiel: Magnetband in einer Musikkassette



Das Magnetband einer Musikkassette (MC) ist 15 µm dick und wird auf eine Spule mit dem Radius $r_1 = 0.45\,\text{cm}$ aufgewickelt, bis der äussere Radius $r_2 = 3\,\text{cm}$ beträgt. Wie lang ist dieses Mangnetband?

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m}$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\mathrm{m}$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\text{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\text{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\text{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}\,\varphi}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}\,\varphi}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}\,\varphi}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi} \left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{600\pi}^{4000\pi}$$

$$f(\varphi) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15\,\mu\mathrm{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$\begin{aligned} s &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}\,\varphi}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{15\,\mu\mathrm{m}}{2\pi} \left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{600\pi}^{4000\pi} = 184.25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$