

DGL ($ay'' + by' + cy = g(x)$)

Übungen

Aufgabe 1

Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$.

Aufgabe 1

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$$

allgemeine Lösung von $y'' - 3y' - 4y = 0$:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

partikuläre Lösung von $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$:

Ansatz:

$$y_p = Ae^{2x} \quad \textbf{(Methode der unbestimmten Koeffizienten)}$$

$$y_p' = 2Ae^{2x}$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x}$$

$$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$$-6Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$$-6A = 3e^{2x} \quad \text{(Koeffizientenvergleich)}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

Aufgabe 2

Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = x^2 - x$.

Aufgabe 2

$$y'' + 2y' + y = x^2 - x$$

allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$$

partikuläre Lösung von $y'' + 2y' + y = x^2 - x$:

Ansatz: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$$y'_p = 2Ax + B$$

$$y''_p = 2A$$

$$2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 - x$$

$$Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C) = x^2 - x$$

$$A = 1$$

$$4A + B = -1 \quad \Rightarrow \quad B = -5$$

$$2A + 2B + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 8$$

$$y_p(x) = x^2 - 5x + 8$$

allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} + x^2 - 5x + 8$$

Aufgabe 3

Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 10 \sin(2x)$.

Aufgabe 3

$$y'' + 2y' + 2y = 10 \sin(2x)$$

allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 0$:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + i$$

$$\lambda_2 = -1 - i$$

$$y_h(x) = (C_1 \sin x + C_2 \cos x)e^{-x}$$

partikuläre Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 10 \sin(2x)$:

Ansatz 1: $y_p = A \sin(2x)$

$$y'_p = 2A \cos(2x)$$

$$y''_p = -4A \sin(2x)$$

$$-4A \sin(2x) + 4A \cos(2x) + 2A \sin(2x) = 10 \sin(2x)$$

$$-2A \sin(2x) + 4A \cos(2x) = 10 \sin(2x) + 0 \cos(2x)$$

$$-2A = 10 \quad \Rightarrow \quad A = -5$$

$$4A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \text{⚡}$$

$$\text{Ansatz 2: } y_p = A \sin(2x) + B \cos(2x)$$

$$y_p' = 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x)$$

$$y_p'' = -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x)$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$-4A \sin(2x) - 4B \cos(2x)$$

$$- 4B \sin(2x) + 4A \cos(2x)$$

$$+ 2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) = 10 \sin(x)$$

$$(-2A - 4B) \sin(2x) + (4A - 2B) \cos(2x) = 10 \sin(2x)$$

$$-2A - 4B = 10$$

$$4A - 2B = 0$$

$$A = -1$$

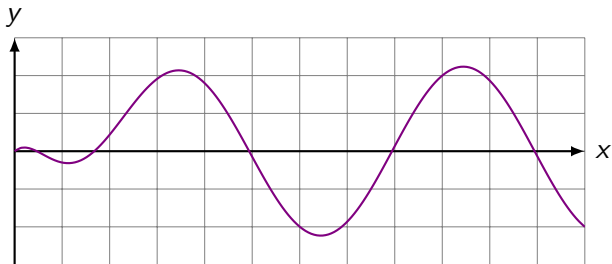
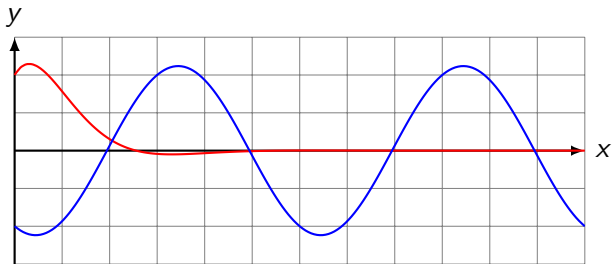
$$B = -2$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= (C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x))e^{-x} - \sin(2x) - 2 \cos(2x)$$

AWP: $y(0) = 0, y'(0) = 0$

$$y(x) = (4 \sin(x) + 2 \cos(x))e^{-x} - \sin(2x) - 2 \cos(2x)$$



Aufgabe 4

Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$.

Aufgabe 4

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

allgemeine Lösung von $y'' - 3y' - 4y = 0$:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

partikuläre Lösung von $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$:

Ansatz: $y_p = Ae^{-x}$

$$y'_p = -Ae^{-x}$$

$$y''_p = Ae^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$0 = e^{-x} \quad \text{keine Lösung}$$

partikuläre Lösung von $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$:

Ansatz: $y_p = Ae^{-x}$

$$y'_p = -Ae^{-x}$$

$$y''_p = Ae^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$0 = e^{-x} \quad \text{keine Lösung}$$

2. Ansatz: $y_p = Axe^{-x}$ eigentlich $(Ax + B)e^x$

$$y'_p = Ae^{-x} - Axe^{-x}$$

$$y''_p = -Ae^{-x} - (Ae^{-x} - Axe^{-x}) = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

$$(-2Ae^{-x} + Axe^{-x}) - 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) - 4Axe^{-x} = e^{-x}$$

$$(-2A - 3A)e^{-x} = e^{-x}$$

$$-5Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$A = -\frac{1}{5}$$

partikuläre Lösung von $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$:

Ansatz: $y_p = Ae^{-x}$

$$y'_p = -Ae^{-x}$$

$$y''_p = Ae^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$0 = e^{-x} \quad \text{keine Lösung}$$

2. Ansatz: $y_p = Axe^{-x}$ eigentlich $(Ax + B)e^x$

$$y'_p = Ae^{-x} - Axe^{-x}$$

$$y''_p = -Ae^{-x} - (Ae^{-x} - Axe^{-x}) = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

$$(-2Ae^{-x} + Axe^{-x}) - 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) - 4Axe^{-x} = e^{-x}$$

$$(-2A - 3A)e^{-x} = e^{-x}$$

$$-5Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$A = -\frac{1}{5}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$