Differenzialgleichungen (Kapitel 7)

Übungen

Bestimme die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

Aufgabe 7.1

Löse das AWP: $y' - y = 2xe^{2x}$; $y(0) = 1$

Aufgabe 7.1

$$y' - y = 2x\mathrm{e}^{2x}$$

$$u(x) = -1 \text{ und } v(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int (-1)\,\mathrm{d}x = -x$$

$$G(x) = \int v(x)\cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{e}^{2x}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{FTB S.73}}{=} 2(x-1)\mathrm{e}^{x}$$

$$y(x) = \big(G(x)+C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(2(x-1)\mathrm{e}^{x}+C\big)\mathrm{e}^{x} = 2(x-1)\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{x}$$

Lösung des AWPs: $y(0) = 1$

$$1 = -2 + C$$

$$C = 3$$

$$\boxed{y(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x}}$$

Aufgabe 7.2

Löse das AWP: $y' + 2y = xe^{-2x}$; $y(1) = 0$

Aufgabe 7.2

$$y' + 2y = x\mathrm{e}^{-2x}$$

$$u(x) = 2 \text{ und } v(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$$

$$G(x) = \int v(x)\cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{e}^{-2x}\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-2x}$$

Lösung des AWP: $(y(1) = 0)$

$$0 = \left(\tfrac{1}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-2}$$

$$C = -\tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{y(x) = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{-2x}}$$

Aufgabe 7.3

Löse das AWP: $xy' + 2y = x^2 - x + 1$ mit $x > 0$; $y(1) = 1/2$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{2}{x}$ und $v(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$

$u(x) = \dfrac{2}{x}$ und $v(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$

$u(x) = \dfrac{2}{x}$ und $v(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x$$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$

$u(x) = \dfrac{2}{x}$ und $v(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x = \ln(x^2)$$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$

$u(x) = \dfrac{2}{x}$ und $v(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x = \ln(x^2)$$

$$G(x) = \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{2}{x}$ und $v(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x = \ln(x^2)$$

$$G(x) = \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 - x^2 + x\right)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 7.3

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad (x > 0)$$

normalisieren: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{2}{x}$ und $v(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x = \ln(x^2)$$

$$G(x) = \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 - x^2 + x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$y(x) = (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-\ln(x^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-\ln(x^2)} \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)x^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right) \mathrm{e}^{-\ln(x^2)} \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right) x^{-2} \\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-\ln(x^2)} \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)x^{-2} \\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}
\end{aligned}
$$

Lösung des AWP: $y(1) = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right) \mathrm{e}^{-\ln(x^2)} \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right) x^{-2} \\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}
\end{aligned}
$$

Lösung des AWP: $y(1) = \frac{1}{2}$

$$
\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{12}
$$

$$y(x) = (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-\ln(x^2)}$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)x^{-2}$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$$

Lösung des AWP: $y(1) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x^{-2}}$$

Aufgabe 7.4

Löse das AWP: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x^2}$ mit $x > 0$; $y(\pi) = 0$

Aufgabe 7.4

$$y' + \frac{2}{x}\, y = \frac{\cos x}{x^2}$$

$$u(x) = \frac{2}{x} \;\text{ und }\; v(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$G(x) = \int v(x)\cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{x^2}\cdot x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = (\sin x + C)\,\mathrm{e}^{-\ln(x^2)}$$

$$= (\sin x + C)\,x^{-2}$$

Lösung des AWP: $y(\pi) = 0$

$$0 = (\sin\pi + C)\,\pi^{-2}$$

$$0 = (0 + C)\pi^{-2}$$

$$C = 0$$

$$\boxed{y(x) = x^{-2}\,\sin x}$$

Aufgabe 7.5

Löse das AWP: $x^3y' + 4x^2y = \mathrm{e}^{-x}$ mit $x \neq 0$; $y(-1) = 0$

Aufgabe 7.5

$$x^3 y' + 4x^2 y = \mathrm{e}^{-x}$$

normalisieren: $y' + \frac{4}{x} y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}$

$u(x) = \frac{4}{x}$ und $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}$.

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = 4\ln x = \ln x^4$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\mathrm{e}^{\ln(x^4)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}x^4\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-x-1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{(FTB S. 73)}$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big((-x-1)\mathrm{e}^{-x} + C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x^4)}$$

$$= \big(-(x+1)\mathrm{e}^{-x} + C\big)x^{-4}$$

Lösung des AWP: $y(-1) = 0$:

$$0 = \left(C + e^1 - e^1\right)(-1)^{-4}$$

$C = 0$

$$\boxed{y(x) = -x\, e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}}$$

Aufgabe 7.6

Löse das AWP: $xy' + (x+1)y = x$ mit $x \neq 0$; $y(\ln 2) = 1$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

Aufgabe 7.6

$xy' + (x+1)y = x$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x}y = 1$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x} y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \frac{x+1}{x}y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x}y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x}y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x} y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^{x} x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^{x}$$

$$y(x) = \left[G(x) + C\right]\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x} y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^{x} x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^{x}$$

$$y(x) = \left[G(x) + C\right]\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = \left(x\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C\right)\mathrm{e}^{-(x+\ln x)}$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x} y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x$$

$$y(x) = \left[G(x) + C\right]\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = \left(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\right)\mathrm{e}^{-(x+\ln x)}$$

$$= \left(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\ln x}$$

Aufgabe 7.6

$$xy' + (x+1)y = x$$

normalisieren: $y' + \dfrac{x+1}{x}y = 1$

$$u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = 1$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x + \ln x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x$$

$$y(x) = \left[G(x) + C\right]\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = \left(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\right)\mathrm{e}^{-(x+\ln x)}$$

$$= \left(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\ln x} = \left(x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}\right)x^{-1}$$

Lösung des AWPs: $y(\ln 2) = 1$

$$1 = \left(\ln 2 - 1 + Ce^{-\ln 2}\right)\frac{1}{\ln 2}$$

Lösung des AWPs: $y(\ln 2) = 1$

$$1 = \big(\ln 2 - 1 + Ce^{-\ln 2}\big)\frac{1}{\ln 2}$$

$$\ln 2 = \ln 2 - 1 + C/2$$

Lösung des AWPs: $y(\ln 2) = 1$

$$1 = \left(\ln 2 - 1 + C\mathrm{e}^{-\ln 2}\right)\frac{1}{\ln 2}$$

$$\ln 2 = \ln 2 - 1 + C/2$$

$$C = 2$$

$$\boxed{y(x) = \left(x - 1 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)x^{-1}}$$

Aufgabe 7.7

Ein Schüler hat sich für eine Prüfung einen gewissen Wissensstoff eingeprägt. Mit der Zeit wird er einiges davon vergessen. Es sei $s(t)$ der Anteil des Stoffes, den er t Zeiteinheiten nach dessen voller Meisterung noch im Gedächtnis hat. Somit ist $s(0) = 1$. Optimistischerweise wird man annehmen dürfen, dass er einen gewissen Anteil des Stoffes $(0 < b < 1)$ nie vergisst. Ferner wird man den Ansatz wagen, dass zur Zeit t die Vergessensrate $\dot{s}(t)$ proportional zu dem Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes, also zu $s(t) - b$, ist. Formuliere das zugehörige Anfangswertproblem, löse es und skizziere die Lösung. Sie wird nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus 1850–1909 das *Ebbinghaussche Vergessensmodell* genannt.

Aufgabe 7.7

$$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b \text{ mit } \alpha > 0$$

Aufgabe 7.7

$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Stoffes ist proportional zum Stoff, der vergessen werden kann. Weil Vergessen eine Verkleinerung des Wissensstoffs darstellt, ist das Vorzeichen negativ.

Aufgabe 7.7

$$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Stoffes ist proportional zum Stoff, der vergessen werden kann. Weil Vergessen eine Verkleinerung des Wissensstoffs darstellt, ist das Vorzeichen negativ.

Normalform: $\dot{s}(t) + \alpha s(t) = \alpha b$

Aufgabe 7.7

$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Stoffes ist proportional zum Stoff, der vergessen werden kann. Weil Vergessen eine Verkleinerung des Wissensstoffs darstellt, ist das Vorzeichen negativ.

Normalform: $\dot{s}(t) + \alpha s(t) = \alpha b$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

Aufgabe 7.7

$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Stoffes ist proportional zum Stoff, der vergessen werden kann. Weil Vergessen eine Verkleinerung des Wissensstoffs darstellt, ist das Vorzeichen negativ.

Normalform: $\dot{s}(t) + \alpha s(t) = \alpha b$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = b \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha b \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t = b \mathrm{e}^{\alpha t}$$

Aufgabe 7.7

$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Stoffes ist proportional zum Stoff, der vergessen werden kann. Weil Vergessen eine Verkleinerung des Wissensstoffs darstellt, ist das Vorzeichen negativ.

Normalform: $\dot{s}(t) + \alpha s(t) = \alpha b$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = b \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha b \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t = b\mathrm{e}^{\alpha t}$$

$$s(t) = \big(G(t) + C\big)\mathrm{e}^{-U(t)} = \big(b\mathrm{e}^{\alpha t} + C\big)\mathrm{e}^{-\alpha t} = b + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

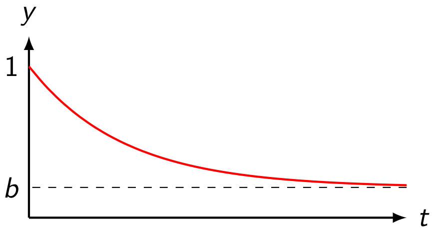
$$\begin{aligned} \text{AWP:} \quad s(0) &= 1 \\ b + C &= 1 \\ C &= 1 - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AWP:} \quad s(0) &= 1 \\ b + C &= 1 \\ C &= 1 - b \end{aligned}$$

$$s(t) = b + (1 - b)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$$\text{AWP:}\quad \begin{aligned} s(0) &= 1 \\ b + C &= 1 \\ C &= 1 - b \end{aligned}$$

$$s(t) = b + (1-b)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$



Aufgabe 7.8

Zur Zeit $t = 0$ wird das Anlegen des Sicherheitsgurtes im Auto zur Pflicht gemacht; die wackeren Bürger kommen jedoch diesem Gesetz nicht sofort nach. $b(t)$ sei der Bruchteil derjenigen, der es zur Zeit $t \geq 0$ befolgt. Man wird annehmen, dass die Anzahl der Gurtbenutzer mit einer Geschwindigkeit wächst, die proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Gurtmuffel ist. Formuliere das entsprechende Anfangswertproblem für $b(t)$ und löse es.

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

$$b(t) = \big(G(t) + C\big)\mathrm{e}^{-U(t)} = \big(\mathrm{e}^{\alpha t} + C\big)\mathrm{e}^{-\alpha t} = 1 + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Aufgabe 7.8

$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t)$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \,\mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

$$b(t) = \big(G(t) + C\big)\mathrm{e}^{-U(t)} = \big(\mathrm{e}^{\alpha t} + C\big)\mathrm{e}^{-\alpha t} = 1 + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

AWP: $b(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$

Aufgabe 7.8

$$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t) \text{ mit } \alpha > 0$$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

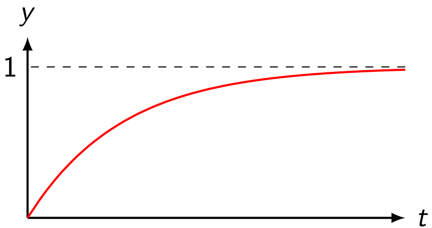
$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \,\mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

$$b(t) = \big(G(t) + C\big)\mathrm{e}^{-U(t)} = \big(\mathrm{e}^{\alpha t} + C\big)\mathrm{e}^{-\alpha t} = 1 + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

AWP: $b(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$

$$\boxed{b(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}}$$



y
1
t

Aufgabe 7.9

Es sei ein Newtonscher Abkühlungsprozess gegeben:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt} \quad \text{mit } \vartheta_U < \vartheta_0$$

Auf welche Temperatur sinkt $\vartheta(t)$ nach Ablauf der Zeit $\tau = \dfrac{\ln 2}{k}$?

Aufgabe 7.9

$$\begin{aligned}
\vartheta\left(t+\frac{\ln 2}{k}\right) &= \vartheta_U + \left(\vartheta_0 - \vartheta_U\right)\mathrm{e}^{-k\left(t+\frac{\ln 2}{k}\right)} \\
&= \vartheta_U + \left(\vartheta_0 - \vartheta_U\right)\mathrm{e}^{-kt-\ln 2} \\
&= \vartheta_U + \left(\vartheta_0 - \vartheta_U\right)\mathrm{e}^{-kt} \cdot \mathrm{e}^{-\ln 2} \\
&= \vartheta_U + \tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0 - \vartheta_U\right)\mathrm{e}^{-kt} \\
&= \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0 - \vartheta_U\right)\mathrm{e}^{-kt} \\
&= \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\left[\vartheta_U + \left(\vartheta_0 - \vartheta_U\right)\mathrm{e}^{-kt}\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\vartheta(t) = \tfrac{1}{2}\left(\vartheta_U + \vartheta(t)\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

Alamagunther Tropfloch holt eine Flasche Bier aus seinem 7 °C-Kühlschrank, in dem sie schon seit zwei Tagen steht. Er hat sie noch nicht geöffnet, da stürzt sein derangierter Bruder Almansor ins Haus und verstrickt ihn ganze 90 Minuten lang in eine hitzige Diskussion über die Zukunft des Ackerbaus am Nordpol. All das spielt sich in dem Wohnzimmer ab, das der energiebewusste Alamagunther auf der patriotischen Temperatur von 19 °C hält. Dem Hausherrn schwant, dass sein vereinsamtes Bier für Christenmenschen zu warm werden wird. Kaum hat Almansor die Haustür zugeschlagen, misst Alamagunther die Temperatur des Gerstensaftes und stellt eine betrübliche Überhitzung desselben auf 15°C fest. Da er, wie jeder passionierte Biertrinker, das Newtonsche Abkühlungsgesetz kennt, schliesst er daraus, dass er Bier mit Zimmertemperatur (19°C) etwa 3 Stunden lang in seinen Kühlschrank stellen muss, um es auf annehmbare 8°C zu bringen. Weise nach, dass er recht hat.

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$19^\circ\mathrm{C} - (19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C})\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} = 15^\circ\mathrm{C}$$

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$19°\mathrm{C} - (19°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C})\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} = 15°\mathrm{C}$$

$$-\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} = \frac{15°\mathrm{C} - 19°\mathrm{C}}{19°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C}} = \frac{-4°\mathrm{C}}{12°\mathrm{C}} = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\begin{aligned}
19^\circ\mathrm{C} - (19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C})\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= 15^\circ\mathrm{C} \\
-\,\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= \frac{15^\circ\mathrm{C} - 19^\circ\mathrm{C}}{19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C}} = \frac{-4^\circ\mathrm{C}}{12^\circ\mathrm{C}} = -\frac{1}{3} \\
\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= \frac{1}{3} \quad || \ln
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\begin{aligned}
19^\circ\mathrm{C} - (19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C})\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= 15^\circ\mathrm{C} \\
-\,\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= \frac{15^\circ\mathrm{C} - 19^\circ\mathrm{C}}{19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C}} = \frac{-4^\circ\mathrm{C}}{12^\circ\mathrm{C}} = -\frac{1}{3} \\
\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= \frac{1}{3} \quad || \ln \\
-\,90\,\mathrm{min}\cdot k &= \ln\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\begin{aligned}
19^\circ\mathrm{C} - (19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C})\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= 15^\circ\mathrm{C} \\
-\,\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= \frac{15^\circ\mathrm{C} - 19^\circ\mathrm{C}}{19^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C}} = \frac{-4^\circ\mathrm{C}}{12^\circ\mathrm{C}} = -\frac{1}{3} \\
\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} &= \frac{1}{3} \quad \| \ln \\
-\,90\,\mathrm{min}\cdot k &= \ln\frac{1}{3} \\
k &= \frac{\ln 3}{90\,\mathrm{min}}
\end{aligned}$$

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt}$$

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\vartheta(180\,\mathrm{min}) = 7°\mathrm{C} + (15°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C})\mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{90\,\mathrm{min}}\cdot 180\,\mathrm{min}}$$

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\vartheta(180\,\mathrm{min}) = 7^\circ\mathrm{C} + (15^\circ\mathrm{C} - 7^\circ\mathrm{C})\mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{90\,\mathrm{min}}\cdot 180\,\mathrm{min}}$$

$$= 7^\circ\mathrm{C} + 8^\circ\mathrm{C}\mathrm{e}^{-2\ln 3} = 7^\circ\mathrm{C} + 8^\circ\mathrm{C}\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{9}}$$

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\vartheta(180\,\mathrm{min}) = 7°\mathrm{C} + (15°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C})\mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{90\,\mathrm{min}}\cdot 180\,\mathrm{min}}$$

$$= 7°\mathrm{C} + 8°\mathrm{C}\mathrm{e}^{-2\ln 3} = 7°\mathrm{C} + 8°\mathrm{C}\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{9}}$$

$$= 7°\mathrm{C} + \frac{1}{9}\cdot 8°\mathrm{C} \approx 7.89°\mathrm{C}$$

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\begin{aligned}\vartheta(180\,\text{min}) &= 7^\circ\text{C} + (15^\circ\text{C} - 7^\circ\text{C})\mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{90\,\text{min}}\cdot 180\,\text{min}} \\ &= 7^\circ\text{C} + 8^\circ\text{C}\mathrm{e}^{-2\ln 3} = 7^\circ\text{C} + 8^\circ\text{C}\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{9}} \\ &= 7^\circ\text{C} + \frac{1}{9}\cdot 8^\circ\text{C} \approx 7.89^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Das Bier hat nach 3 Stunden eine Temperatur von etwa 8°C.

Aufgabe 7.11

Nachdem sich 20 Personen längere Zeit in einem 150 Kubikmeter Luft enthaltenden Raum bei geschlossenen Fenstern und Türen aufgehalten haben, ist der Gehalt der Luft an Kohlendioxid (CO_2) auf 0.3% angestiegen. Jeder Anwesende atmet pro Minute etwa $1/4$ Liter CO_2 aus. Nun wird eine Belüftungsanlage eingeschaltet, die pro Minute 30 Kubikmeter Frischluft mit 0.03% CO_2 in den Raum bläst, sofort mit der verbrauchten Luft vermischt und pro Minute 30 Kubikmeter dieser Mischung aus dem Raum entfernt.

(a) Wie gross ist der Kohlendioxidgehalt $K(t)$ der Raumluft t Minuten nach dem Einschalten der Belüftungsanlage?

(b) Auf welchen (ungefähren) Bruchteil der ursprünglichen Menge wird er schliesslich reduziert?

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

CO_2-Menge via Frischluft: $30\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} \cdot 0.03\% = 0.009\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

CO_2-Menge via Frischluft: $30\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} \cdot 0.03\% = 0.009\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Menge durch Atmung: $20 \cdot \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{min}} = 0.005\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

CO_2-Menge via Frischluft: $30\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} \cdot 0.03\% = 0.009\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Menge durch Atmung: $20 \cdot \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{min}} = 0.005\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

$$\mathrm{d}K(t) = -\frac{K(t)}{150\,\mathrm{m}^3} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.009\,\mathrm{m}^3}{30\,\mathrm{m}^3} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.005\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

CO_2-Menge via Frischluft: $30\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} \cdot 0.03\% = 0.009\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Menge durch Atmung: $20 \cdot \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{min}} = 0.005\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

$$\mathrm{d}K(t) = -\frac{K(t)}{150\,\mathrm{m}^3} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.009\,\mathrm{m}^3}{30\,\mathrm{m}^3} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.005\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t$$

$$CO_2\text{-Volumen} = \underbrace{\text{Volumenkonzentration} \cdot \text{Volumenstrom}}_{\text{Änderungsrate}} \cdot \text{Dauer}$$

Aufgabe 7.11

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

CO_2-Menge via Frischluft: $30\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} \cdot 0.03\% = 0.009\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Menge durch Atmung: $20 \cdot \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{min}} = 0.005\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

$$\mathrm{d}K(t) = -\frac{K(t)}{150\,\mathrm{m}^3} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.009\,\mathrm{m}^3}{30\,\mathrm{m}^3} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.005\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t$$

$$CO_2\text{-Volumen} = \underbrace{\text{Volumenkonzentration} \cdot \text{Volumenstrom}}_{\text{Änderungsrate}} \cdot \text{Dauer}$$

$$\dot{K}(t) = -\frac{1}{5}K(t)\,\frac{1}{\mathrm{min}} + 0.009\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} + 0.005\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad U(t) = 0.2t$$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad U(t) = 0.2t$$

$$v(t) = 0.014 \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int 0.014 \mathrm{e}^{0.2t} \, \mathrm{d}t = 0.07 \mathrm{e}^{0.2t}$$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad U(t) = 0.2t$$

$$v(t) = 0.014 \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int 0.014\mathrm{e}^{0.2t}\,\mathrm{d}t = 0.07\mathrm{e}^{0.2t}$$

$$K(t) = \big(0.07\mathrm{e}^{0.2t} + C\big)\mathrm{e}^{-0.2t} = 0.07 + C\mathrm{e}^{-0.2t}$$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad U(t) = 0.2t$$

$$v(t) = 0.014 \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int 0.014\mathrm{e}^{0.2t}\,\mathrm{d}t = 0.07\mathrm{e}^{0.2t}$$

$$K(t) = \left(0.07\mathrm{e}^{0.2t} + C\right)\mathrm{e}^{-0.2t} = 0.07 + C\mathrm{e}^{-0.2t}$$

AWP:
$$\begin{aligned} K(0) &= 0.45 \\ 0.07 + C &= 0.45 \\ C &= 0.38 \end{aligned}$$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad U(t) = 0.2t$$

$$v(t) = 0.014 \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int 0.014\mathrm{e}^{0.2t}\,\mathrm{d}t = 0.07\mathrm{e}^{0.2t}$$

$$K(t) = \left(0.07\mathrm{e}^{0.2t} + C\right)\mathrm{e}^{-0.2t} = 0.07 + C\mathrm{e}^{-0.2t}$$

AWP:
$$\begin{aligned} K(0) &= 0.45 \\ 0.07 + C &= 0.45 \\ C &= 0.38 \end{aligned}$$

(a) $K(t) = 0.07 + 0.38\mathrm{e}^{-0.2t} \quad \text{mit } [K(t)] = \mathrm{m}^3$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad U(t) = 0.2t$$

$$v(t) = 0.014 \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int 0.014\mathrm{e}^{0.2t}\,\mathrm{d}t = 0.07\mathrm{e}^{0.2t}$$

$$K(t) = \left(0.07\mathrm{e}^{0.2t} + C\right)\mathrm{e}^{-0.2t} = 0.07 + C\mathrm{e}^{-0.2t}$$

AWP:
$$\begin{aligned} K(0) &= 0.45 \\ 0.07 + C &= 0.45 \\ C &= 0.38 \end{aligned}$$

(a) $K(t) = 0.07 + 0.38\mathrm{e}^{-0.2t} \quad \text{mit } [K(t)] = \mathrm{m}^3$

(b) $\dfrac{\lim_{t\to\infty} K(t)}{K(0)} = \dfrac{0.07\,\mathrm{m}^3}{0.45\,\mathrm{m}^3} = 0.16$

Aufgabe 7.12

Die Luft einer Fabrikhalle von 17 600 Kubikmeter enthalte 0.15% Kohlendioxyd (CO_2). Wieviel Kubikmeter Frischluft mit 0.03% Kohlendioxyd muss pro Minute zugeführt werden, damit nach 10 Minuten der CO_2-Gehalt der Hallenluft auf 0.05% gesunken ist? Die zugeführte Frischluft soll sich mit der Hallenluft sofort vermischen, und diese Mischung soll in derselben Menge abgeführt werden, wie die Frischluft zugeführt wird.

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Lüftungsleistung: f in $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Lüftungsleistung: f in $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Abfuhr durch Abluft: $-\dfrac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f$

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Lüftungsleistung: f in $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Abfuhr durch Abluft: $-\dfrac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f$

CO_2-Zufuhr durch Zuluft: $f \cdot 0.03\% = 0.0003 \cdot f$

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Lüftungsleistung: f in $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Abfuhr durch Abluft: $-\dfrac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f$

CO_2-Zufuhr durch Zuluft: $f \cdot 0.03\% = 0.0003 \cdot f$

$$\dot{K}(t) = -\frac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f + 0.0003 \cdot f$$

Aufgabe 7.12

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit t

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Lüftungsleistung: f in $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

CO_2-Abfuhr durch Abluft: $-\dfrac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f$

CO_2-Zufuhr durch Zuluft: $f \cdot 0.03\% = 0.0003 \cdot f$

$$\dot{K}(t) = -\frac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f + 0.0003 \cdot f$$

Normalform: $\dot{K}(t) + \dfrac{f}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot K(t) = 0.0003f$

$$u(t) = \frac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{f}{17\,600} \cdot t$$

$$u(t) = \frac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{f}{17\,600} \cdot t$$

$$v(t) = 0.0003f \quad \Rightarrow$$

$$G(t) = \int 0.0003f\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}\,\mathrm{d}t = 5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}$$

$$u(t) = \frac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{f}{17\,600} \cdot t$$

$$v(t) = 0.0003f \quad \Rightarrow$$
$$G(t) = \int 0.0003f\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}\,\mathrm{d}t = 5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}$$

$$K(t) = \left(5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t} + C\right)\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t} = 5.28 + C\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t}$$

$$u(t) = \frac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{f}{17\,600} \cdot t$$

$$v(t) = 0.0003f \quad \Rightarrow$$
$$G(t) = \int 0.0003f\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}\,\mathrm{d}t = 5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}$$

$$K(t) = \left(5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t} + C\right)\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t} = 5.28 + C\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t}$$

AWP: $K(0) = 26.4 \quad \Rightarrow \quad 5.28 + C = 26.4 \quad \Rightarrow \quad C = 21.12$

$$u(t) = \frac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{f}{17\,600} \cdot t$$

$$v(t) = 0.0003f \quad \Rightarrow$$
$$G(t) = \int 0.0003f \mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t} \, \mathrm{d}t = 5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}$$

$$K(t) = \left(5.28\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t} + C\right)\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t} = 5.28 + C\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t}$$

AWP: $K(0) = 26.4 \quad \Rightarrow \quad 5.28 + C = 26.4 \quad \Rightarrow \quad C = 21.12$

$$K(t) = 5.28 + 21.12\mathrm{e}^{-f/17\,600 \cdot t} \quad \text{mit } [K(t)] = \mathrm{m}^3$$

$$u(t) = \frac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{f}{17\,600} \cdot t$$

$$v(t) = 0.0003f \quad \Rightarrow$$
$$G(t) = \int 0.0003f\mathrm{e}^{f/17\,600 \cdot t}\,\mathrm{d}t = 5.28\mathrm{e}^{f/17\,600\cdot t}$$

$$K(t) = \left(5.28\mathrm{e}^{f/17\,600\cdot t} + C\right)\mathrm{e}^{-f/17\,600\cdot t} = 5.28 + C\mathrm{e}^{-f/17\,600\cdot t}$$

AWP: $K(0) = 26.4 \quad \Rightarrow \quad 5.28 + C = 26.4 \quad \Rightarrow \quad C = 21.12$

$$K(t) = 5.28 + 21.12\mathrm{e}^{-f/17\,600\cdot t} \quad \text{mit } [K(t)] = \mathrm{m}^3$$

$$\begin{aligned} K(10) &= 8.8 \\ 5.28 + 21.12\mathrm{e}^{-f/1760} &= 8.8 \\ \mathrm{e}^{-f/1760} &= 1/6 \\ -f/1760 &= \ln(1/6) \\ f &= 1760 \cdot \ln 6 = 3153.5\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$