Differenzialgleichungen (6)

Übungen

Aufgabe 6.1

Gib die allgemeine Lösung der DGL $y' = y \sin x$ an.

Aufgabe 6.1

$$y' = y \sin x$$

Aufgabe 6.1

$$y' = y \sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \sin x$$

Aufgabe 6.1

$$\begin{aligned} y' &= y \sin x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \sin x \\ \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \sin x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1

$$y' = y \sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \sin x$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \sin x \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.1

$$
\begin{aligned}
y' &= y \sin x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \sin x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \sin x \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \sin x \,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\cos x + C_1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.1

$$
\begin{aligned}
y' &= y \sin x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \sin x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \sin x \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \sin x \,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\cos x + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{C_1 - \cos x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.1

$$
\begin{aligned}
y' &= y \sin x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \sin x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \sin x \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \sin x \,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\cos x + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{C_1 - \cos x} \\
y &= \pm \mathrm{e}^{C_1} \cdot \mathrm{e}^{-\cos x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.1

$$
\begin{aligned}
y' &= y \sin x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \sin x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \sin x \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \sin x \,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\cos x + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{C_1 - \cos x} \\
y &= \pm \mathrm{e}^{C_1} \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} \\
y &= C\mathrm{e}^{-\cos x} \qquad (C = \pm \mathrm{e}^{C_1})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.2

Gib die allgemeine Lösung der DGL $y' = 2x(1 + y^2)$ an.

Aufgabe 6.2

$$y' = 2x(1 + y^2)$$

Aufgabe 6.2

$$y' = 2x(1+y^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x(1+y^2)$$

Aufgabe 6.2

$$
\begin{aligned}
y' &= 2x(1+y^2) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x(1+y^2) \\
\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.2

$$
\begin{aligned}
y' &= 2x(1+y^2) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x(1+y^2) \\
\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int 2x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.2

$$
\begin{aligned}
y' &= 2x(1+y^2) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x(1+y^2) \\
\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\
\arctan y &= x^2 + C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.2

$$\begin{aligned}
y' &= 2x(1+y^2) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x(1+y^2) \\
\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\
\arctan y &= x^2 + C \\
y &= \tan(x^2 + C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3

Ermittle die durch $P_0(0,0)$ gehende Lösungskurve der DGL $y' = -2x + 1$.

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 1$$

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 1$$

$$\mathrm{d}y = (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 1$$

$$\mathrm{d}y = (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int 1\,\mathrm{d}y = \int (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 1$$

$$\mathrm{d}y = (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int 1\,\mathrm{d}y = \int (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$y = -x^2 + x + C \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 1$$

$$\mathrm{d}y = (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int 1\,\mathrm{d}y = \int (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$y = -x^2 + x + C \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $P_0(0,0)$: $0 = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Aufgabe 6.3

$$y' = -2x + 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 1$$

$$\mathrm{d}y = (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int 1\,\mathrm{d}y = \int (-2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$y = -x^2 + x + C \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $P_0(0,0)$: $0 = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$y(x) = -x^2 + x$$

Aufgabe 6.4

Ermittle die durch $P_0(1, 2)$ gehende Lösungskurve der DGL $y' = y/x$.

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{C_1}$$

Aufgabe 6.4

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x} \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= \ln|x| + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{\ln|x| + C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{C_1} \\
y &= \pm C_2 \cdot |x| \quad (C_2 = \mathrm{e}^{C_1})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{C_1}$$

$$y = \pm C_2 \cdot |x| \quad (C_2 = \mathrm{e}^{C_1})$$

$$y = C \cdot |x| \quad (C = \pm C_2)$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot\mathrm{e}^{C_1}$$

$$y = \pm C_2\cdot|x| \quad (C_2 = \mathrm{e}^{C_1})$$

$$y = C\cdot|x| \quad (C = \pm C_2)$$

AWP: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$:

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{C_1}$$

$$y = \pm C_2 \cdot |x| \quad (C_2 = \mathrm{e}^{C_1})$$

$$y = C \cdot |x| \quad (C = \pm C_2)$$

AWP: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$:

$$2 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 2$$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot\mathrm{e}^{C_1}$$

$$y = \pm C_2\cdot|x| \quad (C_2 = \mathrm{e}^{C_1})$$

$$y = C\cdot|x| \quad (C = \pm C_2)$$

AWP: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$:

$$2 = C\cdot 1 \Rightarrow C = 2$$

$$y = 2x$$

Aufgabe 6.5

Ermittle die durch $P_0(1, -1)$ gehende Lösungskurve der DGL $y' = (y/x)^2$.

Aufgabe 6.5

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

Aufgabe 6.5

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{x^2}$$

Aufgabe 6.5

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.5

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.5

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y^2}{x^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2}{x^2} \\ \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} - C \end{aligned}$$

Aufgabe 6.5

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y^2}{x^2} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2}{x^2} \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} - C \\
\frac{1}{y} &= \frac{1}{x} + C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.5

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y^2}{x^2} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2}{x^2} \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} - C \\
\frac{1}{y} &= \frac{1}{x} + C \\
y &= \frac{1}{1/x + C} = \frac{x}{1 + Cx}
\end{aligned}
$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$:

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$:

$$-1 = \frac{1}{1+C} \Rightarrow C = -2$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$:

$$-1 = \frac{1}{1+C} \Rightarrow C = -2$$

$$y = \frac{x}{1-2x}$$

Aufgabe 6.6

Bestimme die Lösung der DGL $y' = y^2x + y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Aufgabe 6.6

$$y' = y^2 x + y^2$$

Aufgabe 6.6

$$y' = y^2 x + y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2(x+1)$$

Aufgabe 6.6

$$y' = y^2 x + y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2(x+1)$$

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = (x+1)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.6

$$
\begin{aligned}
y' &= y^2 x + y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2(x+1) \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= (x+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.6

$$
\begin{aligned}
y' &= y^2 x + y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2(x+1) \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= (x+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + x + C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.6

$$
\begin{aligned}
y' &= y^2 x + y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2(x+1) \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= (x+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \\
\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2}x^2 - x - C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.6

$$y' = y^2 x + y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2(x+1)$$

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = (x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int (x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - x - C$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C}$$

AWP: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$:

AWP: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$1 = \frac{-1}{C} \Rightarrow C = -1$$

AWP: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$1 = \frac{-1}{C} \Rightarrow C = -1$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x - 1} = \frac{2}{2 - 2x - x^2}$$

Aufgabe 6.7

Bestimme die Lösung der DGL $y' = \mathrm{e}^{x-y}$ welche die Bedingung $y(1) = 2$ erfüllt.

Aufgabe 6.7

$$y' = \mathrm{e}^{x-y}$$

Aufgabe 6.7

$$y' = \mathrm{e}^{x-y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$

Aufgabe 6.7

$$y' = \mathrm{e}^{x-y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}$$

$$\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.7

$$
\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^{x-y} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} \\
\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y &= \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.7

$$
\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^{x-y} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \\
\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y &= \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
\mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^x + C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.7

$$y' = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y \, dy = e^x \, dx$$

$$\int e^y \, dy = \int e^x \, dx$$

$$e^y = e^x + C$$

$$y = \ln(e^x + C)$$

Aufgabe 6.7

$$y' = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y \, dy = e^x \, dx$$

$$\int e^y \, dy = \int e^x \, dx$$

$$e^y = e^x + C$$

$$y = \ln(e^x + C)$$

AWP: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$:

Aufgabe 6.7

$$y' = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y \, dy = e^x \, dx$$

$$\int e^y \, dy = \int e^x \, dx$$

$$e^y = e^x + C$$

$$y = \ln(e^x + C)$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

$2 = \ln(e + C) \Rightarrow e^2 = e + C \Rightarrow C = e^2 - e$

Aufgabe 6.7

$$y' = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y \, dy = e^x \, dx$$

$$\int e^y \, dy = \int e^x \, dx$$

$$e^y = e^x + C$$

$$y = \ln(e^x + C)$$

AWP: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$:

$2 = \ln(e + C) \Rightarrow e^2 = e + C \Rightarrow C = e^2 - e$

$y = \ln(e^x + e^2 - e)$

Aufgabe 6.8

Bestimme die durch $P(0, a)$ gehende Lösungskurve der Differentialgleichung

$$y' = k \cdot y$$

Dabei ist a beliebig und k positiv. Welche Bedeutung kommt dabei den Konstanten a und k zu?

Aufgabe 6.8

$$y' = k \cdot y$$

Aufgabe 6.8

$$y' = k \cdot y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot y$$

Aufgabe 6.8

$$y' = k \cdot y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot y$$

$$\mathrm{d}y = k \cdot y \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.8

$$y' = k \cdot y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot y$$

$$\mathrm{d}y = k \cdot y \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = k \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.8

$$
\begin{aligned}
y' &= k \cdot y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k \cdot y \\
\mathrm{d}y &= k \cdot y \,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= k \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int k \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.8

$$y' = k \cdot y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot y$$

$$\mathrm{d}y = k \cdot y \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = k \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \int k \, \mathrm{d}x$$

$$\ln |y| = kx + C_1$$

Aufgabe 6.8

$$
\begin{aligned}
y' &= k \cdot y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k \cdot y \\
\mathrm{d}y &= k \cdot y \, \mathrm{d}x \\
\frac{1}{y} \, \mathrm{d}y &= k \, \mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y &= \int k \, \mathrm{d}x \\
\ln |y| &= kx + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{kx + C_1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.8

$$
\begin{aligned}
y' &= k \cdot y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k \cdot y \\
\mathrm{d}y &= k \cdot y \, \mathrm{d}x \\
\frac{1}{y} \, \mathrm{d}y &= k \, \mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y &= \int k \, \mathrm{d}x \\
\ln |y| &= kx + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{kx + C_1} \\
y &= \pm \mathrm{e}^{kx} \cdot \mathrm{e}^{C_1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.8

$$
\begin{aligned}
y' &= k \cdot y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k \cdot y \\
\mathrm{d}y &= k \cdot y \,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= k \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int k \,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= kx + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{kx+C_1} \\
y &= \pm\mathrm{e}^{kx} \cdot \mathrm{e}^{C_1} \\
y &= C \cdot \mathrm{e}^{kx} \quad (C = \pm\mathrm{e}^{C_1})
\end{aligned}
$$

AWP ($y = a$, $x = 0$): $a = C \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = a$

AWP ($y = a$, $x = 0$): $a = C \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = a$

$y = a \cdot \mathrm{e}^{kx}$

AWP ($y = a$, $x = 0$): $a = C \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = a$

$y = a \cdot \mathrm{e}^{kx}$

- Die Konstante k beeinflusst den Anstieg der Kurve (Wachstumskonstante).
- Die Konstante a ist der Ordinatenabschnitt von $y(x)$ (Anfangswert bei $t = 0$).

Aufgabe 6.9

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1 - x)$$

wobei k eine positive Konstante ist.

Aufgabe 6.9

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1 - x)$$

Aufgabe 6.9

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1-x)$$

$$\mathrm{d}x = kx(1-x)\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 6.9

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1-x)$$

$$\mathrm{d}x = kx(1-x)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 6.9

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= kx(1-x)\\ \mathrm{d}x &= kx(1-x)\,\mathrm{d}t\\ \frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x &= k\,\mathrm{d}t\\ \int \frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x &= \int k\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Aufgabe 6.9

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1-x)$$

$$\mathrm{d}x = kx(1-x)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int k\,\mathrm{d}t$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x = kt + C_1 \quad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

Aufgabe 6.9

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1-x)$$

$$\mathrm{d}x = kx(1-x)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int k\,\mathrm{d}t$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x = kt + C_1 \quad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

$$\ln|x| - \ln|1-x| = kt + C_1 \quad \text{(Substitutionsregel)}$$

Aufgabe 6.9

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= kx(1-x) \\
\mathrm{d}x &= kx(1-x)\,\mathrm{d}t \\
\frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x &= k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x &= kt + C_1 \quad \text{(Partialbruchzerlegung)} \\
\ln|x| - \ln|1-x| &= kt + C_1 \quad \text{(Substitutionsregel)} \\
\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| &= kt + C_1 \quad \text{(Logarithmengesetze)}
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt}$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt}$$

$$\frac{x}{1-x} = C_2 e^{kt} \qquad (C_2 = \pm e^{C_1})$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt}$$

$$\frac{x}{1-x} = C_2 e^{kt} \qquad (C_2 = \pm e^{C_1})$$

$$x = C_2(1-x)e^{kt} = C_2 e^{kt} - C_2 x e^{kt}$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = \mathrm{e}^{kt+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{kt}$$

$$\frac{x}{1-x} = C_2\mathrm{e}^{kt} \qquad (C_2 = \pm\mathrm{e}^{C_1})$$

$$x = C_2(1-x)\mathrm{e}^{kt} = C_2\mathrm{e}^{kt} - C_2x\mathrm{e}^{kt}$$

$$x(1+C_2\mathrm{e}^{kt}) = C_2\mathrm{e}^{kt}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x}{1-x}\right| &= e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt} \\
\frac{x}{1-x} &= C_2e^{kt} \qquad (C_2 = \pm e^{C_1}) \\
x &= C_2(1-x)e^{kt} = C_2e^{kt} - C_2xe^{kt} \\
x(1+C_2e^{kt}) &= C_2e^{kt} \\
x &= \frac{C_2e^{kt}}{1+C_2e^{kt}} = \frac{C_2e^{kt}\cdot e^{-kt}}{(1+C_2e^{kt})\cdot e^{-kt}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x}{1-x}\right| &= \mathrm{e}^{kt+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{kt} \\
\frac{x}{1-x} &= C_2\mathrm{e}^{kt} \qquad (C_2 = \pm\mathrm{e}^{C_1}) \\
x &= C_2(1-x)\mathrm{e}^{kt} = C_2\mathrm{e}^{kt} - C_2x\mathrm{e}^{kt} \\
x(1+C_2\mathrm{e}^{kt}) &= C_2\mathrm{e}^{kt} \\
x &= \frac{C_2\mathrm{e}^{kt}}{1+C_2\mathrm{e}^{kt}} = \frac{C_2\mathrm{e}^{kt}\cdot\mathrm{e}^{-kt}}{(1+C_2\mathrm{e}^{kt})\cdot\mathrm{e}^{-kt}} \\
x &= \frac{C_2}{\mathrm{e}^{-kt}+C_2} = \frac{C_2\cdot C_2^{-1}}{(\mathrm{e}^{-kt}+C_2)\cdot C_2^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = \mathrm{e}^{kt+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{kt}$$

$$\frac{x}{1-x} = C_2\mathrm{e}^{kt} \qquad (C_2 = \pm\mathrm{e}^{C_1})$$

$$x = C_2(1-x)\mathrm{e}^{kt} = C_2\mathrm{e}^{kt} - C_2 x\mathrm{e}^{kt}$$

$$x(1+C_2\mathrm{e}^{kt}) = C_2\mathrm{e}^{kt}$$

$$x = \frac{C_2\mathrm{e}^{kt}}{1+C_2\mathrm{e}^{kt}} = \frac{C_2\mathrm{e}^{kt}\cdot\mathrm{e}^{-kt}}{(1+C_2\mathrm{e}^{kt})\cdot\mathrm{e}^{-kt}}$$

$$x = \frac{C_2}{\mathrm{e}^{-kt}+C_2} = \frac{C_2\cdot C_2^{-1}}{(\mathrm{e}^{-kt}+C_2)\cdot C_2^{-1}}$$

$$x = \frac{1}{1+C\mathrm{e}^{-kt}} \qquad (C = C_2^{-1})$$

AWP: $t = 0$ und $x = \frac{1}{2}$:

AWP: $t = 0$ und $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

AWP: $t = 0$ und $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$y = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-kt}}$$

AWP: $t = 0$ und $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$y = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-kt}}$$

Aufgabe 6.10

Die positiven Zahlen k und a seien konstant. Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$yy' + k^2x = 0$$

deren graphische Darstellung durch $P_0(a, 0)$ geht. Erkläre die Bedeutung der Konstanten k und a.

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2x = 0$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2x = 0$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k^2x$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2 x = 0$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k^2 x$$

$$y\,\mathrm{d}y = -k^2 x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2 x = 0$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k^2 x$$

$$y\,\mathrm{d}y = -k^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int k^2 x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2 x = 0$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k^2 x$$

$$y\,\mathrm{d}y = -k^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int k^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}k^2 x^2 - C_1 \quad \| \cdot 2$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2x = 0$$

$$\begin{aligned}
y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -k^2x \\
y\,\mathrm{d}y &= -k^2x\,\mathrm{d}x \\
\int y\,\mathrm{d}y &= -\int k^2x\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}k^2x^2 - C_1 \quad || \cdot 2 \\
y^2 &= -k^2x^2 - 2C_1
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2x = 0$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k^2x$$

$$y\,\mathrm{d}y = -k^2x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int k^2x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}k^2x^2 - C_1 \quad || \cdot 2$$

$$y^2 = -k^2x^2 - 2C_1$$

$$y^2 + k^2x^2 = -2C_1$$

Aufgabe 6.10

$$yy' + k^2 x = 0$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k^2 x$$

$$y\,\mathrm{d}y = -k^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int k^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}k^2 x^2 - C_1 \quad || \cdot 2$$

$$y^2 = -k^2 x^2 - 2C_1$$

$$y^2 + k^2 x^2 = -2C_1$$

$$y^2 + (kx)^2 = C \qquad (\text{wobei } C = -2C_1)$$

AWP: $x_0 = a$, $y_0 = 0$:

AWP: $x_0 = a$, $y_0 = 0$:

$$0 + (ka)^2 = C \quad \Rightarrow \quad C = (ka)^2$$

AWP: $x_0 = a$, $y_0 = 0$:

$$0 + (ka)^2 = C \quad \Rightarrow \quad C = (ka)^2$$

$$y^2 + (kx)^2 = (ka)^2$$

AWP: $x_0 = a$, $y_0 = 0$:

$0 + (ka)^2 = C \quad \Rightarrow \quad C = (ka)^2$

$y^2 + (kx)^2 = (ka)^2$

Dividiert man die partikuläre Lösung durch $(ka)^2$ und vertauscht die Summanden, erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{ka}\right)^2 = 1$$

die grafisch als Ellipse mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen a und ka gedeutet werden kann.

Aufgabe 6.11

Zwei chemische Substanzen der Anfangsmengen a und b reagieren miteinander. Nach Ablauf der Zeit t haben die Mengen x beider Substanzen miteinander reagiert; die Reaktionsgeschwindigkeit $\dot{x}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{x} = k(a - x)(b - x)$$

mit einer von der Reaktion charakteristischen Konstanten k. Bestimme $x(t)$.

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x)(b - x)$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

$$1 = A(b-x) + B(a-x)$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

$$1 = A(b-x) + B(a-x)$$

$$1 = (-A-B)x + (bA + aB)$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge" ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

$$1 = A(b-x) + B(a-x)$$

$$1 = (-A-B)x + (bA + aB)$$

$$-A - B = 0$$

$$bA + aB = 1$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

$$1 = A(b-x) + B(a-x)$$

$$1 = (-A-B)x + (bA + aB)$$

$$\begin{aligned} -A - B &= 0 \\ bA + aB &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -A &= B \\ bA - aA &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

$$1 = A(b-x) + B(a-x)$$

$$1 = (-A-B)x + (bA + aB)$$

$$\begin{aligned} -A - B &= 0 \\ bA + aB &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -A &= B \\ bA - aA &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1/(b-a) \\ B &= -1/(b-a) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b-a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\,dt \quad || \cdot (b-a)$$

$$\frac{1}{b-a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\,dt \quad || \cdot (b-a)$$

$$\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k(b-a)\,dt$$

$$\frac{1}{b-a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\, dt \quad || \cdot (b-a)$$

$$\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k(b-a)\, dt$$

$$-\ln(a-x) + \ln(b-x) = k(b-a)t + C_1$$

$$\frac{1}{b-a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\,dt \quad || \cdot (b-a)$$

$$\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k(b-a)\,dt$$

$$-\ln(a-x) + \ln(b-x) = k(b-a)t + C_1$$

$$\ln(a-x) - \ln(b-x) = -k(b-a)t - C_1$$

$$\frac{1}{b-a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\,dt \quad || \cdot (b-a)$$

$$\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k(b-a)\,dt$$

$$-\ln(a-x) + \ln(b-x) = k(b-a)t + C_1$$

$$\ln(a-x) - \ln(b-x) = -k(b-a)t - C_1$$

$$\ln\frac{a-x}{b-x} = -k(b-a)t - C_1$$

$$\frac{1}{b-a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\, dt \quad || \cdot (b-a)$$

$$\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k(b-a)\, dt$$

$$-\ln(a-x) + \ln(b-x) = k(b-a)t + C_1$$

$$\ln(a-x) - \ln(b-x) = -k(b-a)t - C_1$$

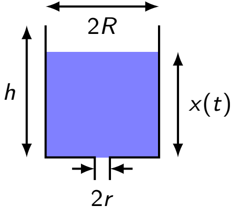
$$\ln\frac{a-x}{b-x} = -k(b-a)t - C_1$$

$$\frac{x-a}{x-b} = \mathrm{e}^{-k(b-a)t}\mathrm{e}^{-C_1}$$

$$\cdots$$

Aufgabe 6.12

Ein zylindrisches Gefäss mit Höhe h und Radius R ist mit Wasser gefüllt. In der Grundfläche befindet sich eine kreisförmige Öffnung mit Radius r.



Die momentane Höhe x des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit t erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -k\sqrt{x} \quad \text{mit} \quad k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g} \quad (g\text{: Fallbeschleunigung})$$

Ermittle $x(t)$ und die Ausfliesszeit, wenn zur Zeit $t = 0$ das Gefäss bis zum Rand gefüllt war.

Aufgabe 6.12

$$\dot{x} = -k\sqrt{x}$$

Aufgabe 6.12

$$\dot{x} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{x}$$

Aufgabe 6.12

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -k\sqrt{x} \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -k\sqrt{x} \\
\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= -k\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.12

$$\dot{x} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -k\,\mathrm{d}t$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -k\int 1\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 6.12

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -k\sqrt{x} \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -k\sqrt{x} \\
\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= -k\,\mathrm{d}t \\
\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x &= -k\int 1\,\mathrm{d}t \\
2x^{\frac{1}{2}} &= -kt + C_1
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.12

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -k\sqrt{x} \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -k\sqrt{x} \\
\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= -k\,\mathrm{d}t \\
\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x &= -k\int 1\,\mathrm{d}t \\
2x^{\frac{1}{2}} &= -kt + C_1 \\
x^{\frac{1}{2}} &= -\frac{k}{2}t + \frac{1}{2}C_1
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.12

$$\dot{x} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -k\,\mathrm{d}t$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -k\int 1\,\mathrm{d}t$$

$$2x^{\frac{1}{2}} = -kt + C_1$$

$$x^{\frac{1}{2}} = -\frac{k}{2}t + \frac{1}{2}C_1$$

$$x = \left(C - \frac{1}{2}kt\right)^2 \quad (C = \frac{1}{2}C_1)$$

AWP: $x(0) = h$

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$

Dabei wurde $k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}$ eingesetzt und der Faktor $\frac{1}{2}$ unter die Wurzel gezogen.

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t \right)^2$

Dabei wurde $k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}$ eingesetzt und der Faktor $\frac{1}{2}$ unter die Wurzel gezogen.

Ausfliesszeit: Wasserstand $h = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_a) = 0$

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$

Dabei wurde $k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}$ eingesetzt und der Faktor $\frac{1}{2}$ unter die Wurzel gezogen.

Ausfliesszeit: Wasserstand $h = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_a) = 0$

$$\left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2 = 0$$

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t \right)^2$

Dabei wurde $k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}$ eingesetzt und der Faktor $\frac{1}{2}$ unter die Wurzel gezogen.

Ausfliesszeit: Wasserstand $h = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_a) = 0$

$$\left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t \right)^2 = 0$$

$$\frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t = \sqrt{h}$$

AWP: $x(0) = h$

$$h = (C - 0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$

Dabei wurde $k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}$ eingesetzt und der Faktor $\frac{1}{2}$ unter die Wurzel gezogen.

Ausfliesszeit: Wasserstand $h = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_a) = 0$

$$\left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2 = 0$$

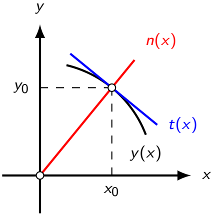
$$\frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t = \sqrt{h}$$

$$t = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

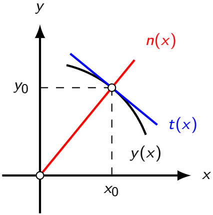
Aufgabe 6.13

Bestimme alle Kurven mit der Eigenschaft, dass die Normale in jedem Kurvenpunkt durch den Koordinatenursprung geht.

Aufgabe 6.13

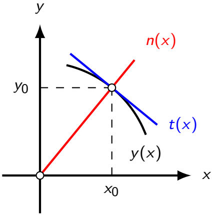


Aufgabe 6.13



Gleichung der Tangente $t(x)$: $y'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

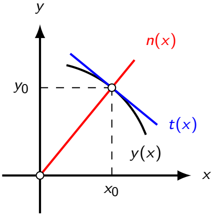
Aufgabe 6.13



Gleichung der Tangente $t(x)$: $y'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Gleichung der Normalen $n(x)$: $\dfrac{-1}{y'(x_0)} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Aufgabe 6.13

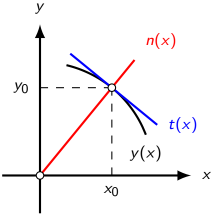


Gleichung der Tangente $t(x)$: $y'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Gleichung der Normalen $n(x)$: $\dfrac{-1}{y'(x_0)} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Für jeden Kurvenpunkt (x_0, y_0) muss gelten: $(0, 0) \in G_n$

Aufgabe 6.13



Gleichung der Tangente $t(x)$: $y'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Gleichung der Normalen $n(x)$: $\dfrac{-1}{y'(x_0)} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Für jeden Kurvenpunkt (x_0, y_0) muss gelten: $(0, 0) \in G_n$

Bemerkungen:

- Statt y_0 hätte man deutlicher $y(x_0)$ schreiben können.
- Nicht x_0 und y_0 müssen null gesetzt werden sondern x und y.

$$\frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y_0}{0 - x_0}$$

$$-y'(x_0) = \frac{x_0}{y_0}$$

$$y_0 y'(x_0) = -x_0$$

$$\frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y_0}{0 - x_0}$$

$$-y'(x_0) = \frac{x_0}{y_0}$$

$$y_0 y'(x_0) = -x_0$$

Da die Bedingung für jedes $x_0 \in D$ gelten muss, können wir die DGL ohne den Index schreiben:

$$\frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y_0}{0 - x_0}$$

$$-y'(x_0) = \frac{x_0}{y_0}$$

$$y_0 y'(x_0) = -x_0$$

Da die Bedingung für jedes $x_0 \in D$ gelten muss, können wir die DGL ohne den Index schreiben:

$$y \cdot y' = -x$$

Separation:

$$
\begin{aligned}
y\,y' &= -x \\
y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x \\
y\,\mathrm{d}y &= -x\,\mathrm{d}x \\
\int y\,\mathrm{d}y &= -\int x\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
y^2 &= -x^2 + 2C_1 \\
x^2 + y^2 &= C \qquad (C = 2C_1)
\end{aligned}
$$

Separation:

$$
\begin{aligned}
y\,y' &= -x \\
y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x \\
y\,\mathrm{d}y &= -x\,\mathrm{d}x \\
\int y\,\mathrm{d}y &= -\int x\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
y^2 &= -x^2 + 2C_1 \\
x^2 + y^2 &= C \qquad (C = 2C_1)
\end{aligned}
$$

geometrische Deutung: Kreis mit $M(0,0)$ und $r = \sqrt{C}$