Differenzialgleichungen (1)

Übungen

Aufgabe 1.1 (Cholera)

wird durch den von Robert Koch (1843–1910) entdeckten kommaförmigen Bazillus *Vibrio cholerae* hervorgerufen. Zur Zeit $t_0 = 0$ werde eine Kolonie dieses Bazillus in eine Nährflüssigkeit gebracht. 30 Minuten später bestehe sie aus 329 Mitgliedern nach weiteren 60 Minuten aus 2684.

(a) Wie gross ist die Verdoppelungszeit von *Vibrio cholerae*?

(b) Wie viele Mitglieder hat die Kolonie 5 Stunden nach Beginn des Experiments?

Die Ergebnisse lassen verstehen, warum in früheren Zeiten ein Cholerakranker rasch seinen Leiden erlag.

Aufgabe 1.1

(a) $N(30) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{30\alpha} = 329$

$N(90) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{90\alpha} = 2684$

Aufgabe 1.1

(a) $N(30) = N(0) \cdot e^{30\alpha} = 329$

$$N(90) = N(0) \cdot e^{90\alpha} = 2684$$

$$\frac{N(90)}{N(30)} = \frac{e^{90\alpha}}{e^{30\alpha}} = \frac{2684}{329}$$

$$e^{60\alpha} = 2684/329$$

$$60\alpha = \ln(2684/329)$$

$$\alpha = 0.03498$$

$$\delta = \ln 2/\alpha = 19.81 \text{ Minunten}$$

Aufgabe 1.1

(a) $N(30) = N(0) \cdot e^{30\alpha} = 329$

$$N(90) = N(0) \cdot e^{90\alpha} = 2684$$

$$\frac{N(90)}{N(30)} = \frac{e^{90\alpha}}{e^{30\alpha}} = \frac{2684}{329}$$

$$e^{60\alpha} = 2684/329$$

$$60\alpha = \ln(2684/329)$$

$$\alpha = 0.03498$$

$$\delta = \ln 2/\alpha = 19.81 \text{ Minuten}$$

(b) $N(300) = N(90) \cdot e^{\alpha \cdot 210} = 4\,162\,322$ Bakterien

Aufgabe 1.2 (Wundinfektionen und Gewebsnekrosen)

Hier tritt ein Bazillus (*Pseudomonas*) auf, dessen Verdoppelungszeit nur etwa 9.8 Minuten beträgt und der einer der gefürchtetsten Feinde des Chirurgen ist. Wie lange dauert es, bis aus hundert dieser Bazillen eine Million geworden sind?

Aufgabe 1.2

Verdoppelungszeit: $\delta = \ln 2/\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln 2/\delta$

Aufgabe 1.2

Verdoppelungszeit: $\delta = \ln 2/\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln 2/\delta$

$$N(t) = 10^2 \cdot e^{\alpha t} = 10^2 \cdot e^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^6$$

Aufgabe 1.2

Verdoppelungszeit: $\delta = \ln 2/\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln 2/\delta$

$$N(t) = 10^2 \cdot e^{\alpha t} = 10^2 \cdot e^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^6$$

$$e^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^4$$

Aufgabe 1.2

Verdoppelungszeit: $\delta = \ln 2/\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln 2/\delta$

$$N(t) = 10^2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} = 10^2 \cdot \mathrm{e}^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^6$$

$$\mathrm{e}^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^4$$

$$\ln 2/\delta \cdot t = 4 \ln 10$$

Aufgabe 1.2

Verdoppelungszeit: $\delta = \ln 2/\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln 2/\delta$

$$N(t) = 10^2 \cdot e^{\alpha t} = 10^2 \cdot e^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^6$$

$$e^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^4$$

$$\ln 2/\delta \cdot t = 4 \ln 10$$

$$t = \frac{4\delta \ln 10}{\ln 2} = 130.2\,\text{Minuten}$$

Aufgabe 1.3 (Vermehrung von Fruchtfliegen)

Um 1920 stellte R. Pearl experimentell fest, dass die Änderungsrate $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ einer Population von Fruchtfliegen (Drosophila) mit der Populationsgrösse $P(t)$ vermittels der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 \quad (t \text{ in Tagen})$$

zusammenhängt. Anfänglich seien 10 Fruchtfliegen vorhanden. Zeige, dass die Population ständig zunimmt aber niemals mehr als 1035 Mitglieder hat. Wie gross ist sie nach 12 Tagen? Bei welcher Populationsgrösse und am wievielten Tag beginnt die Wachstumsrate abzunehmen?

Aufgabe 1.3

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 = \frac{1}{5175}P\,(1035 - P) \quad (t \text{ in Tagen})$$

Aufgabe 1.3

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 = \frac{1}{5175}P\,(1035 - P) \quad (t \text{ in Tagen})$$

Lösung der DGL mit $c = 5175^{-1}$ und $G = 1035$: (FTB, S. 67)

Aufgabe 1.3

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 = \frac{1}{5175}P\,(1035 - P) \quad (t \text{ in Tagen})$$

Lösung der DGL mit $c = 5175^{-1}$ und $G = 1035$: (FTB, S. 67)

$$P(t) = \frac{1035}{1 + a \cdot 1035\mathrm{e}^{-1/5 \cdot t}}$$

Aufgabe 1.3

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 = \frac{1}{5175}P\,(1035 - P) \quad (t \text{ in Tagen})$$

Lösung der DGL mit $c = 5175^{-1}$ und $G = 1035$: (FTB, S. 67)

$$P(t) = \frac{1035}{1 + a \cdot 1035\mathrm{e}^{-1/5 \cdot t}}$$

$$P(0) = \frac{1035}{1 + 1035a \cdot \mathrm{e}^0} = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 41/414 \approx 0.099$$

Aufgabe 1.3

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 = \frac{1}{5175}P\,(1035 - P) \quad (t \text{ in Tagen})$$

Lösung der DGL mit $c = 5175^{-1}$ und $G = 1035$: (FTB, S. 67)

$$P(t) = \frac{1035}{1 + a \cdot 1035\mathrm{e}^{-1/5 \cdot t}}$$

$$P(0) = \frac{1035}{1 + 1035a \cdot \mathrm{e}^0} = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 41/414 \approx 0.099$$

$$P(t) = \frac{1035}{1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}}$$

- $1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}$ monoton fallend $\Rightarrow P(t)$ monoton wachsend

- $1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}$ monoton fallend $\Rightarrow P(t)$ monoton wachsend
- $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = 1035$

- $1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}$ monoton fallend $\Rightarrow P(t)$ monoton wachsend
- $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1035$
- $P(12) = 100$ Fruchtfliegen

- $1 + 102.5e^{-0.2t}$ monoton fallend $\Rightarrow$ $P(t)$ monoton wachsend
- $\lim_{t \to \infty} P(t) = 1035$
- $P(12) = 100$ Fruchtfliegen
- $$\begin{aligned} P(t) &= G/2 \\ \frac{1035}{1 + 102.5e^{-0.2t}} &= \frac{1035}{2} \\ 102.5e^{-0.2t} &= 1 \\ -0.2t &= -\ln 102.5 \\ t &= 23.15 \text{ Tage} \\ P(23.15) &\approx 518 \text{ Fruchtfliegen} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

Das radioaktive Cäsium-137 verliert durch Zerstrahlung etwa 2.3% seiner Masse pro Jahr. Wie gross ist seine Zerfallskonstante und seine Halbwertszeit?

Aufgabe 1.4

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Jahren})$$

Aufgabe 1.4

$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad (t \text{ in Jahren})$

Nach einem Jahr ($t = 1$) ist noch $100\% - 2.3\% = 97.7\%$ der Masse vorhanden:

Aufgabe 1.4

$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Jahren})$

Nach einem Jahr ($t = 1$) ist noch $100\% - 2.3\% = 97.7\%$ der Masse vorhanden:

$$\begin{aligned} N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 1} &= 0.977 N_0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda} &= 0.977 \\ -\lambda &= \ln 0.977 \\ \lambda &= -\ln 0.977 \approx 0.0233 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Jahren})$$

Nach einem Jahr ($t = 1$) ist noch $100\% - 2.3\% = 97.7\%$ der Masse vorhanden:

$$\begin{aligned} N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 1} &= 0.977 N_0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda} &= 0.977 \\ -\lambda &= \ln 0.977 \\ \lambda &= -\ln 0.977 \approx 0.0233 \end{aligned}$$

Halbwertszeit: $t_{1/2} = \ln(2)/\lambda \approx 29.8\,\mathrm{a}$

Aufgabe 1.5

Die Halbwertszeit von Kalium-42 beträgt 12.45 Stunden.

(a) Wieviel Prozent der Ausgangsmasse N_0 werden nach 10 Stunden noch vorhanden sein?

(b) Nach wieviel Stunden werden 5% der Ausgangsmasse zerstrahlt sein?

Aufgabe 1.5

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Stunden})$$

Aufgabe 1.5

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad (t \text{ in Stunden})$$

Halbwertszeit: $t_{0.5} = \ln(2)/\lambda$

$$\lambda = \ln(2)/t_{0.5} = 0.05567$$

Aufgabe 1.5

$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad (t \text{ in Stunden})$

Halbwertszeit: $t_{0.5} = \ln(2)/\lambda$

$$\lambda = \ln(2)/t_{0.5} = 0.05567$$

(a) $N(10) = 0.573$ (57.3%)

Aufgabe 1.5

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Stunden})$$

Halbwertszeit: $t_{0.5} = \ln(2)/\lambda$

$$\lambda = \ln(2)/t_{0.5} = 0.05567$$

(a) $N(10) = 0.573$ (57.3%)

(b) $$\begin{aligned} N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} &= 0.95 N_0 \\ e^{-\lambda t} &= 0.95 \\ -\lambda t &= \ln 0.95 \\ t &= -\ln 0.95/\lambda \approx 0.921\,\text{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.6 (Lagerung radioaktiver Abfälle)

Radioaktive Abfälle werden in Behältern aus rostfreiem Stahl oder Beton unter der Erde gelagert. Nach Meinung von Experten sollen die Behälter intakt bleiben, bis 99.99% des Abfalls zerstrahlt sind. Wie lang muss die Mindestlebenszeit der Behälter sein, wenn in ihnen gelagert werden soll:

(a) Strontium-90 (Halbwertszeit 28 Jahre)
(b) Radium-226 (Halbwertszeit 1620 Jahre)
(c) Plutonium-239 (Halbwertszeit 24360 Jahre; dieses Element wird in Atombomben und Kernreaktoren verwendet).

Hinweis: Zeige, dass die gesuchte Zeit T (in Jahren) gegeben wird durch

$$T = \tau \frac{\ln 10\,000}{\ln 2} \approx \tau \cdot 13.28\ldots$$

und rechne dann mit der Sicherheitsfaustformel $T = 13.3\tau$.

Aufgabe 1.6

Halbwertszeit: $\tau = \log(2)/\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \log(2)/\tau$

$$N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} = 0.0001 N_0$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} = 0.0001$$

$$-\lambda \cdot t = \ln 0.0001$$

$$\lambda t = -\ln 0.0001 = \ln 0.0001^{-1} = \ln 10\,000$$

$$t = \frac{\ln 10\,000}{\lambda} = \frac{\ln 10\,000 \cdot \tau}{\ln 2} \approx 13.3\tau$$

(a) Strontium-90: $13.3 \cdot 28\,\mathrm{a} = 372\,\mathrm{a}$

(b) Radium-226: $13.3 \cdot 1620\,\mathrm{a} = 21\,546\,\mathrm{a}$

(c) Plutonium-239: $13.3 \cdot 24\,360\,\mathrm{a} = 323\,988\,\mathrm{a}$

Aufgabe 1.7 (Verkaufsrückgang nach Werbungsstop)

Marktanalytische Untersuchungen von M. Vidale und H. Wolfe haben 1957 folgendes ergeben: Wenn zur Zeit $t_0 = 0$ die Werbung für ein gewisses Produkt völlig eingestellt wird, nehmen die wöchentlichen Verkäufe dieses Produktes proportional zu den in der Vorwoche getätigten Verkäufen ab. Zeige, dass die Zahl $v(t)$ der Verkäufe in der t-ten Woche nach dem Werbungsstop (näherungsweise) durch

$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

gegeben wird; dabei ist v_0 die Zahl der Verkäufe in der Woche vor dem Ende der Werbung und λ eine positive Konstante, die sogenannte Verkaufszerfallskonstante (*sales decay constant*).

Aufgabe 1.7

$$\mathrm{d}v = -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

Aufgabe 1.7

$$\mathrm{d}v = -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot v$$

Aufgabe 1.7

$$\mathrm{d}v = -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot v$$

$$\dot{v} = -\lambda \cdot v$$

Aufgabe 1.7

$$\mathrm{d}v = -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot v$$

$$\dot{v} = -\lambda \cdot v$$

Ansatz: $v(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Aufgabe 1.7

$$\mathrm{d}v = -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot v$$

$$\dot{v} = -\lambda \cdot v$$

Ansatz: $v(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Kontrolle: $\dot{v}(t) = -\lambda C\mathrm{e}^{-\lambda t} = -v(t) \quad \text{(ok)}$

Aufgabe 1.7

$$\mathrm{d}v = -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot v$$

$$\dot{v} = -\lambda \cdot v$$

Ansatz: $v(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Kontrolle: $\dot{v}(t) = -\lambda C\mathrm{e}^{-\lambda t} = -v(t) \quad \text{(ok)}$

Anfangswertproblem: $v_0 = v(0) = C$

Aufgabe 1.7

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\lambda \cdot v \\ \dot{v} &= -\lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ansatz: $v(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Kontrolle: $\dot{v}(t) = -\lambda C\mathrm{e}^{-\lambda t} = -v(t) \quad \text{(ok)}$

Anfangswertproblem: $v_0 = v(0) = C$

Insgesamt: $v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Aufgabe 1.8 („Da unten aber ist's fürchterlich")

So klagt Schillers Taucher; denn in der Tiefe des Meer wimmelt es von Ungeheuern – und obendrein ist es noch dunkel. Letzteres, weil die Intensität des Lichtes beim Durchgang durch Wasser wegen Absorption ständig geringer wird. Sei $I(x)$ die Lichtintensität x Meter unter der Wasseroberfläche. Dann wird man für die Intensitätsabnahme den Ansatz $\mathrm{d}I = -\lambda I(x)\mathrm{d}x$ mit einem positiven Absorptionskoeffizienten λ machen (warum?). Gewinne daraus das Lambertsche Absorptionsgesetz

$$I(x) = I_0 \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \text{mit } I_0 = I(0).$$

I_0 ist die Lichtintensität an der Wasseroberfläche. Für Tageslicht und halbwegs sauberes Seewasser ist $\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$. Wieviel Prozent der Tageslichtintensität I_0 sind in 1, 2, 3, 4 Meter unter der Wasseroberfläche noch vorhanden? Man beantworte dieselbe Frage für etwas trüberes Seewasseer $\lambda = 2\,\mathrm{m}^{-1}$. Was wird man unter der „Halbwertslänge" verstehen, und wie gross ist sie in den vorliegenden Fällen?

Aufgabe 1.8

$$\mathrm{d}I = -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x$$

Aufgabe 1.8

$$\mathrm{d}I = -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot I$$

Aufgabe 1.8

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I &= -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} &= -\lambda \cdot I \\ \dot{I} &= -\lambda \cdot I \end{aligned}$$

Aufgabe 1.8

$$\mathrm{d}I = -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot I$$
$$\dot{I} = -\lambda \cdot I$$

Ansatz: $I(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Aufgabe 1.8

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I &= -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} &= -\lambda \cdot I \\
\dot{I} &= -\lambda \cdot I
\end{aligned}$$

Ansatz: $I(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Kontrolle: $\dot{I}(x) = -\lambda C \mathrm{e}^{-\lambda x} = -I(x) \quad \text{(ok)}$

Aufgabe 1.8

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I &= -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} &= -\lambda \cdot I \\ \dot{I} &= -\lambda \cdot I \end{aligned}$$

Ansatz: $I(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Kontrolle: $\dot{I}(x) = -\lambda C\mathrm{e}^{-\lambda x} = -I(x) \quad \text{(ok)}$

Anfangswertproblem: $I_0 = I(0) = C$

Aufgabe 1.8

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I &= -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} &= -\lambda \cdot I \\ \dot{I} &= -\lambda \cdot I \end{aligned}$$

Ansatz: $I(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Kontrolle: $\dot{I}(x) = -\lambda C\mathrm{e}^{-\lambda x} = -I(x) \quad \text{(ok)}$

Anfangswertproblem: $I_0 = I(0) = C$

Insgesamt: $I(x) = I_0\mathrm{e}^{-\lambda x}$

$\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	24.66%
2 m	6.08%
3 m	1.50%
4 m	0.37%

$\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	24.66%
2 m	6.08%
3 m	1.50%
4 m	0.37%

$\lambda = 2.0\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	13.53%
2 m	1.83%
3 m	0.25%
4 m	0.03%

$\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	24.66%
2 m	6.08%
3 m	1.50%
4 m	0.37%

$\lambda = 2.0\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	13.53%
2 m	1.83%
3 m	0.25%
4 m	0.03%

Halbwertslänge: Wassertiefe, bei der das Licht 50% seiner Intensität (gegenüber der Wasseroberfläche) verloren hat.

$\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	24.66%
2 m	6.08%
3 m	1.50%
4 m	0.37%

$\lambda = 2.0\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	13.53%
2 m	1.83%
3 m	0.25%
4 m	0.03%

Halbwertslänge: Wassertiefe, bei der das Licht 50% seiner Intensität (gegenüber der Wasseroberfläche) verloren hat.

$x_{0.5} = \ln(2)/1.4\,\mathrm{m}^{-1} = 0.4951\,\mathrm{m}$

$\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	24.66%
2 m	6.08%
3 m	1.50%
4 m	0.37%

$\lambda = 2.0\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	13.53%
2 m	1.83%
3 m	0.25%
4 m	0.03%

Halbwertslänge: Wassertiefe, bei der das Licht 50% seiner Intensität (gegenüber der Wasseroberfläche) verloren hat.

$x_{0.5} = \ln(2)/1.4\,\mathrm{m}^{-1} = 0.4951\,\mathrm{m}$

$x_{0.5} = \ln(2)/2\,\mathrm{m}^{-1} = 0.3466\,\mathrm{m}$