

Voraussetzung: Alle betrachteten Matrizen sind reelle quadratische Matrizen, deren Eigenwerte sämtlich reell sind.

1. Du kannst Eigenwerte und Eigenvektoren geometrisch interpretieren und erklären, wie eine lineare Abbildung auf ihre Eigenvektoren wirkt.
2. Du kannst für eine quadratische Matrix A und eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ überprüfen, ob x ein Eigenwert von A ist und gegebenenfalls die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}$ bestimmen.
3. Du kannst für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ überprüfen, ob $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A ist und gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert bestimmen.
4. Du kannst ...
 - (a) das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnen und durch Lösen der Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$ die Eigenwerte der Matrix A bestimmen sowie
 - (b) zu jedem Eigenwert λ kannst du die zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ bestimmen. Du weißt, dass die Anzahl der zu λ gehörenden linear unabhängigen Eigenwerte (*geometrische Vielfachheit*) stets zwischen 1 und der Vielfachheit von λ (*algebraische Vielfachheit*) liegt.

Um den manuellen Rechenaufwand in einem vernünftigen Rahmen zu halten, enthalten Matrizen mit $n \geq 3$ zahlreiche Nulleinträge. *Hinweis:* Für Matrizen mit $n \leq 3$ dürfen Polynomgleichungen und Gleichungssysteme mit dem Taschenrechner gelöst werden.

5. Du kannst die Eigenwerte einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix anhand ihrer Diagonalelemente bestimmen.
6. Du kannst anhand der Eigenwerte einer quadratischen Matrix entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist.
7. Du kannst aus einem Eigenwert λ und einem zugehörigen Eigenvektor einer Matrix A einen Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor der Matrixpotenz A^m bestimmen.
8. Du kannst die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ anhand der Beziehungen

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr} A \quad [\operatorname{tr} \text{ (trace): Summe der Diagonalelemente}]$$

überprüfen. Dabei werden die Eigenwerte mit ihrer algebraischen Vielfachheit berücksichtigt.