

**Aufgabe 11.1**

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda_2 = 2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da  $A$  eine Eigbasis besitzt, ist  $A$  diagonalisierbar.

Prüfe  $PDP^{-1} = A$ .

**Aufgabe 11.2**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 1 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Da  $A$  keine Eigenbasis besitzt, ist  $A$  nicht diagonalisierbar.

**Aufgabe 11.3**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 1 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da  $A$  eine Eigenbasis besitzt, ist  $A$  diagonalisierbar

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow PDP^{-1} = A$$

**Aufgabe 11.4**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 1 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & 0 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 0 & 2^{n+1} + 1 \end{pmatrix}$$