

**Aufgabe 10.1**

$$(a) \lambda_1 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \lambda_3 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \lambda_1 = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.2**

$$(a) \lambda_1 = 3 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda_2 = -1 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \lambda_1 = \lambda_2 = 4 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.3**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = -1: \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von  $A^{25}$ :  $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 1^{25} = 1$ ,  $\lambda'_3 = (-1)^{25} = -1$

Eigenvektoren von  $A^{25}$ :  $\vec{v}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (dieselben wie  $A$ )

Hat  $A$  den Eigenwert  $\lambda$  und den Eigenvektor  $\vec{v}$ , so gilt  $A^2 \vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot A\vec{v} = \lambda \cdot \lambda \vec{v} = \lambda^2 \vec{v}$ . Somit hat  $A^2$  den Eigenwert  $\lambda^2$  und denselben Eigenvektor wie  $A$ . Eine analoge Aussage lässt sich für  $A^n$  herleiten.