

Lineare Algebra

Kapitel 8

Aufgabe 8.1

Bestimme die Determinanten

$$(a) \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.1

$$(a) \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$$

Aufgabe 8.1

$$(a) \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 0$$

Aufgabe 8.1

$$(a) \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 0$$

$$(c) \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{6} - 4 \cdot \sqrt{6} = -3 \cdot \sqrt{6}$$

Aufgabe 8.2

$$\det \begin{pmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{pmatrix} &= (a-3) \cdot (a-2) - (-15) \\ &= a^2 - 5a + 6 + 15 = a^2 - 5a + 21\end{aligned}$$

Aufgabe 8.3

Man verifiziere die Gleichung $\det A = \det A^T$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8.3

$$\blacktriangleright \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 4 - 3 \cdot 1 = -11$$

$$\blacktriangleright \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -11$$

Aufgabe 8.4

Man bestimme die Determinanten durch „Hinsehen“.

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 8.4

- (a) (obere) Diagonalmatrix: $3 \cdot 5 \cdot (-2) = -30$
- (b) Die dritte Zeile ist identisch mit der ersten: 0
- (c) Die zweite Zeile ist das Doppelte der ersten: 0

Aufgabe 8.5

Bestimme die Determinanten der Elementarmatrizen.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.5

(a) -5

(b) -1

(c) 1

Aufgabe 8.6

Berechne die Determinante der Matrix durch Umformung auf Dreiecksgestalt mittels elementarer Zeilenumformungen.

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.6 (a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ = (-3) \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-2) = 30$$

Aufgabe 8.6 (b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-5) = 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.6

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 8.5 = -17$$

Aufgabe 8.7

Gegeben ist $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$. Berechne damit:

(a) $\det \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Aufgabe 8.7

- (a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-6) = -6$ [zwei Zeilenvertauschungen]
- (b) $3 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot (-6) = 72$
- (c) -6 [Addition der dritten Zeile zur ersten hat keinen Einfluss]

Aufgabe 8.8

Berechne die Determinanten der Dreiecksmatrizen.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.8

(a) $\det A = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det A = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

Aufgabe 8.9

Entscheide, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.9

(a) $\det A = -124 \Rightarrow A$ ist invertierbar.

(b) $\det A = 0 \Rightarrow A$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det A = 0 \Rightarrow A$ ist nicht invertierbar.

Aufgabe 8.10

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ mit $\det A = 7$. Bestimme

- (a) $\det 3A$
- (b) $\det A^{-1}$
- (c) $\det 2A^{-1}$
- (d) $\det(2A)^{-1}$
- (e) $\det A^T$

Aufgabe 8.10

(a) $\det 3A = 3^3 \cdot \det A = 27 \cdot 7 = 189$

(b) $\det A^{-1} = 1/\det A = 1/7$

(c) $\det 2A^{-1} = 2^3/\det A = 8/7$

(d) $\det(2A)^{-1} = \det \frac{1}{2}A^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1/\det A = 1/56$

(e) $\det A^T = \det A = 7$

Aufgabe 8.11

Für welche Werte von k ist A nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & 4 \\ 5 & k-2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.11

$$\det(A) = 0$$

$$(k - 3)(k - 2) - 4 \cdot 5 = 0$$

$$k^2 - 5k + 6 - 20 = 0$$

$$k^2 - 5k - 14 = 0$$

$$(k - 7)(k + 2) = 0$$

$$k_1 = 7$$

$$k_2 = -2$$

A ist nicht invertierbar für $k = 7$ oder $k = -2$.

Aufgabe 8.12

Für welche Werte von k ist A nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.12

$$\det(A) = 0$$

$$2 + 12k + 36 - 4k - 18 - 12 = 0$$

$$8k + 8 = 0$$

$$k = -1$$

A ist nicht invertierbar für $k = -1$.

Aufgabe 8.13

Berechne die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ mit der

Kofaktorregel.

Aufgabe 8.13

$$\det(A) = 19$$